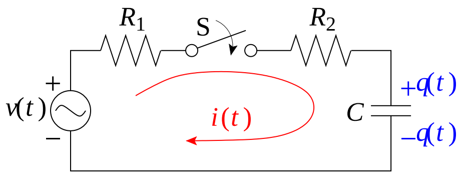
電気回路演習 II 第 11 回 (平成 20 年 7 月 04 日 (金))

演習

図の回路において $t = 0$ でスイッチ S を閉じるとする．以下の設問に答えなさい．なお，交流電源を $v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$，コンデンサ C の初期電荷を 0 とする．



図

(a) コンデンサの電荷の時間変化を $q(t)$ として，この $q(t)$ を用いて図の回路の $t \geq 0$ での回路方程式を求めなさい．

(b) 設問 (a) で導出した回路方程式に対する定常解 $q_s(t)$ を求めなさい．

(c) 設問 (a) で導出した回路方程式に対する過渡解 $q_t(t)$ を求めなさい．

(d) 図の回路のコンデンサ C に蓄えられる電荷 $q(t)$ を求めなさい．

(e) 回路に流れる電流 $i(t)$ を求めなさい．

演習解答

(a) 電流 $i(t)$ と電荷 $q(t)$ を用いると回路方程式は

$$(R_1 + R_2) i(t) + \frac{q(t)}{C} = V_m \sin(\omega t + \theta)$$

となる．コンデンサに流れる電流 $i(t)$ と電荷 $q(t)$ の関係 $i(t) = dq(t)/dt$ を用いると上式は

$$(R_1 + R_2) \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = V_m \sin(\omega t + \theta)$$

となる．

(b) 設問 (a) で求めた回路方程式の定常解 $q_s(t)$ に対する方程式は

$$(R_1 + R_2) \frac{dq_s(t)}{dt} + \frac{q_s(t)}{C} = V_m \sin(\omega t + \theta)$$

定常解については交流理論を用いて求めると

$$j\omega Q_s (R_1 + R_2) + \frac{Q_s}{C} = V_m e^{j\theta}$$

上式を Q_s について解くと

$$\begin{aligned} Q_s &= \frac{V_m e^{j\theta}}{j\omega(R_1 + R_2) + \dfrac{1}{C}} = \frac{C V_m e^{j\theta}}{1 + j\omega C(R_1 + R_2)} \\ &= \frac{C V_m}{\sqrt{1 + \{\omega C (R_1 + R_2)\}^2}} e^{j(\theta - \phi)} \qquad \left(\phi = \tan^{-1} \{\omega C(R_1 + R_2)\}\right) \end{aligned}$$

上式の時間領域での表現を求めると

$$\begin{aligned} q_s(t) &= \mathrm{Im}\left\{Q_s e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{ \frac{C V_m}{\sqrt{1 + \{\omega C(R_1 + R_2)\}^2}} e^{j(\omega t + \theta - \phi)} \right\} \\ &= \frac{C V_m}{\sqrt{1 + \{\omega C(R_1 + R_2)\}^2}} \sin(\omega t + \theta - \phi) \end{aligned}$$

(c) 設問 (a) で求めた回路方程式の過渡解 $q_t(t)$ に対する方程式は

$$(R_1+R_2)\frac{dq_t(t)}{dt}+\frac{q_t(t)}{C}=0$$

上式の解は

$$q_t(t)=Ae^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}} \qquad (A\ :\ \text{積分定数})$$

(d) 設問 (a) で求めた回路方程式の一般解 $q(t)$ は，設問 (b)，(c) の結果から

$$q(t)=q_s(t)+q_t(t)=Q_m\sin(\omega t+\theta-\phi)+Ae^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}} \qquad \left(Q_m=\frac{CV_m}{\sqrt{1+\{\omega C(R_1+R_2)\}^2}}\right)$$

初期条件として $t=0$ で $q(0)=0$ を用いると

$$q(0)=Q_m\sin(\theta-\phi)+A=0 \qquad \rightarrow \qquad A=-Q_m\sin(\theta-\phi)$$

となる．よって

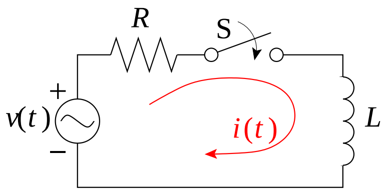
$$q(t)=Q_m\sin(\omega t+\theta-\phi)-Q_m\sin(\theta-\phi)e^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}}$$

(e) $i(t)=\frac{dq(t)}{dt}$ に設問 (d) の結果を代入すると

$$\begin{aligned}
i(t) &= \frac{dq(t)}{dt}=\omega Q_m\cos(\omega t+\theta-\phi)+\frac{Q_m}{C(R_1+R_2)}\sin(\theta-\phi)e^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}}\\
&\quad Q_m=\frac{CV_m}{\sqrt{1+\{\omega C(R_1+R_2)\}^2}}\\
&\quad \phi=\tan^{-1}\{\omega C(R_1+R_2)\}
\end{aligned}$$

小テスト

図の回路において $t=0$ でスイッチ S を閉じるとする．以下の設問に答えなさい．なお，回路に流れる電流を $i(t)$ ，交流電源を $v(t)=V_m\sin(\omega t+\theta)$ とする．



図

(a) 図の回路の $t\geq 0$ での回路方程式を求めなさい．

(b) 設問 (a) で導出した回路方程式に対する定常解 $i_s(t)$ を求めなさい．

(c) 設問 (a) で導出した回路方程式に対する過渡解 $i_t(t)$ を求めなさい．

(d) 回路に流れる電流 $i(t)$ を求めなさい．

小テスト解答

(a)

$$Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}=V_m\sin(\omega t+\theta)$$

(b) 定常解 $i_s(t)$ に対する方程式は

$$Ri_s(t)+L\frac{di_s(t)}{dt}=V_m\sin(\omega t+\theta)$$

定常解については交流理論を用いて求めると

$$RI_s+j\omega LI_s=V_me^{j\theta}$$

上式より I_s を求めると

$$I_s=\frac{V_me^{j\theta}}{R+j\omega L}=V_me^{j\theta}\frac{1}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}e^{-j\phi}=\frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}e^{j(\theta-\phi)}\qquad\left(\phi=\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right)$$

よって定常解は時間領域において

$$i_s(t)=\frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t+\theta-\phi)$$

(c) 過渡解 $i_t(t)$ に対する方程式は

$$Ri_t(t)+L\frac{di_t(t)}{dt}=0$$

上式に対する解は

$$i_t(t)=Ae^{-\frac{R}{L}t}\qquad(A\ :\ \text{積分定数})$$

(d) 電流 $i(t)$ は設問 (b)，(c) の結果より

$$i(t)=i_s(t)+i_t(t)=\frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t+\theta-\phi)+Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

初期条件として $t=0$ で $i(0)=0$ を用いると

$$i(0) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}\sin(\theta-\phi) + A = 0 \qquad \rightarrow \qquad A = -\frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}\sin(\theta-\phi)$$

となる．よって

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}\left\{\sin(\omega t+\theta-\phi) - \sin(\theta-\phi)e^{-\frac{R}{L}t}\right\} \\ & \phi = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R} \end{aligned}$$