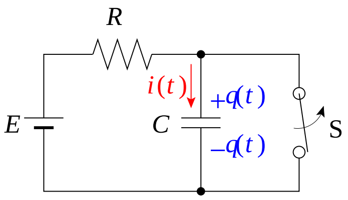
電気回路演習 II 第 10 回 (平成 20 年 6 月 27 日 (金))

演習

図に示す回路においてスイッチ S を閉じて定常状態になった後，時刻 $t = 0$ でスイッチ S を開く場合を考える．以下の設問に答えなさい．



図

(a) スイッチ S を開いた後 $(t \geq 0)$ のコンデンサ C に蓄えられた電荷 $q(t)$ を求めなさい．

(b) 設問 (a) の結果からコンデンサ C に流れる電流 $i(t)$ を求めなさい．

(c) 電流 $i(t)$ の時間変化をグラフに示しなさい．

以下の設問では $E = 13.5$ V，$R = 5$ kV，$C = 1$ μF，$e \simeq 2.7$ として答えなさい．

(d) 時定数 τ の値を求めなさい．

(e) $t = 0$ s のときの電流 $i(0)$ を求めなさい．

(f) $t = 5$ ms のときの電流 $i(5$ ms$)$ を求めなさい．

演習解答

(a) 定常状態 $(t = 0)$ でコンデンサ C の電位 V_C，電荷 Q はそれぞれ

$$\begin{aligned} V_c &= 0 \\ Q &= 0 \end{aligned}$$

$t = 0$ でスイッチ S が開いた後の回路方程式は

$$Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = E$$

さらに $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ から

$$R\frac{q(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E$$

上式の定常解 $q_s(t)$ と過渡解 $q_t(t)$ はそれぞれ

定常解 $\quad R\dfrac{dq_s(t)}{dt} + \dfrac{q_s(t)}{C} = E \quad \rightarrow \quad \dfrac{q_s(t)}{C} = E \quad \rightarrow \quad q_s(t) = CE$

過渡解 $\quad R\dfrac{dq_t(t)}{dt} + \dfrac{q_t(t)}{C} = 0 \quad \rightarrow \quad q_t(t) = Ae^{-\frac{t}{CR}} \quad$ (A は積分定数)

従って一般解 $q(t)$ は

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = CE + Ae^{-\frac{t}{CR}}$$

$t = 0$ での初期条件は定常状態の V_C，Q より

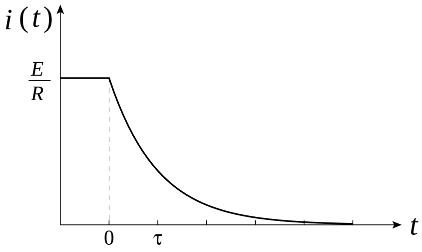
$$q(0) = CE + A = 0 \quad \rightarrow \quad A = -CE$$

以上より

$$q(t) = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right)$$

(b) 設問 (a) の結果より

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{CR}}$$

(c) 

(d) 時定数 τ は過渡解の振幅が $1/e$ になるまでの時間なので，設問 (a) で求めた過渡解から

$$e^{-\frac{\tau}{CR}} = e^{-1} \qquad \rightarrow \qquad \tau = CR = 1 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^{3} = 5 \times 10^{-3}\ \mathrm{s} = 5\ \mathrm{ms}$$

(e) 設問 (b) の結果に与えられた値を代入すると

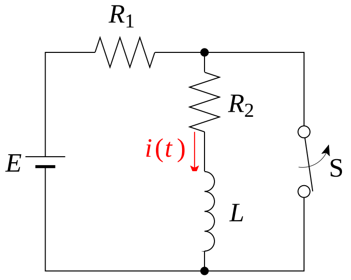
$$i(0) = \frac{13.5}{5 \times 10^{3}} e^{-0} = 2.7\ \mathrm{mA}$$

(f) 設問 (b) の結果に与えられた値を代入すると

$$i(5\ \mathrm{ms}) = \frac{13.5}{5 \times 10^{3}} e^{-\frac{5 \times 10^{-3}}{1 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^{3}}} = 2.7 \times 10^{-3} \cdot e^{-1} \simeq 1\ \mathrm{mA}$$

小テスト

図に示す回路においてスイッチ S を閉じて定常状態になった後，時刻 $t = 0$ でスイッチ S を開く場合を考える．以下の設問に答えなさい．



図

(a) スイッチ S を開いた後 $(t \geq 0)$ のコイル L に流れる電流 $i(t)$ を求めなさい．

(b) スイッチ S を開いた後 $(t \geq 0)$ の電流 $i(t)$ の時間変化をグラフに示しなさい．

以下の設問では $E = 5.4$ V，$R_1 = R_2 = 10\ \Omega$，$L = 200$ mH，$e \simeq 2.7$ として答えなさい．

(c) 時定数 τ の値を求めなさい．

(d) $t = 0$ s のときの電流 $i(0)$ を求めなさい．

(e) $t = 10$ ms のときの電流 $i(10\ \text{ms})$ を求めなさい．

小テスト解答

(a) 定常状態 $(t = 0)$ でコイルに流れる電流 I は

$$I \quad = \quad 0$$

である．$t = 0$ でスイッチ S が開いた後の回路方程式は，$R = R_1 + R_2$ として

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E$$

上式の定常解 $i_s(t)$ と過渡解 $i_t(t)$ はそれぞれ

$$\begin{array}{llllll} \text{定常解} & L\dfrac{di_s(t)}{dt} + Ri_s(t) = E & \rightarrow & Ri_s(t) = E & \rightarrow & i_s(t) = \dfrac{E}{R} \\ \text{過渡解} & L\dfrac{di_t(t)}{dt} + Ri_t(t) = 0 & \rightarrow & i_t(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} & & (A\ \text{は積分定数}) \end{array}$$

よって一般解 $i(t)$ は

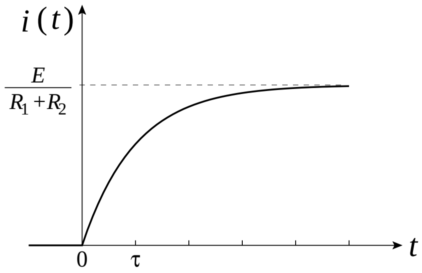
$$i(t) = i_s(t) + i_t(t) = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

$t = 0$ での初期条件は定常状態での電流 $I = 0$ より

$$i(0) = \frac{E}{R} + A = 0 \quad \rightarrow \quad A = -\frac{E}{R}$$

以上より電流 $i(t)$ は

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{E}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-\frac{R_1+R_2}{L}t}\right)$$

(b) 

(c) 時定数 τ は過渡解の振幅が $1/e$ になるまでの時間なので，設問 (a) で求めた過渡解から

$$e^{-\frac{R_1+R_2}{L}\tau} = e^{-1} \qquad \rightarrow \qquad \tau = \frac{L}{R_1+R_2} = \frac{200\times10^{-3}}{10+10} = 10\times10^{-3}\ \mathrm{s} = 10\ \mathrm{ms}$$

(d) 設問 (a) の結果に与えられた値を代入すると

$$i(0) = \frac{5.4}{20}\left(1-e^{0}\right) = 0\ \mathrm{mA}$$

(e) 設問 (a) の結果に与えられた値を代入すると

$$i(10\ \mathrm{ms}) = \frac{5.4}{20}\left(1-e^{-\frac{10+10}{200\times10^{-3}}\times10\times10^{-3}}\right) = \frac{5.4}{20}\left(1-e^{-1}\right) \simeq \frac{1}{20}\left(5.4-\frac{5.4}{2.7}\right) = \frac{3.4}{20} = 0.17\ \mathrm{A}$$