電気回路演習 II 第 9 回 (平成 20 年 6 月 13 日 (金))

演習

図 1 の回路に対して以下の設問に答えなさい．ただし，電源の角周波数を ω とする．

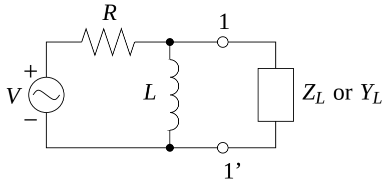


図 1

(a) 端子 $1-1'$ より左側の回路のテブナン等価回路を書き，内部インピーダンス Z_0，開放電圧 V_f を求めなさい．

(b) 端子 $1-1'$ より左側の回路のノルトン等価回路を書き，内部アドミタンス Y_0，短絡電流 I_s を求めなさい．

(c) 図 1 の回路の負荷 Z_L として，図 2 に示す回路を接続したとき，負荷 Z_L での消費電力が最大となる R_L，C_L を求めなさい．また，消費電力の最大値 $P_{\max}$ を求めなさい．

(d) 図 1 の回路の負荷 Y_L として，図 3 に示す回路を接続したとき，負荷 Y_L での消費電力が最大となる R_L，C_L を求めなさい．また，消費電力の最大値 $P_{\max}$ を求めなさい．

(e) 図 1 の回路の負荷 Z_L として，図 4 に示す回路を接続したとき，抵抗 R_L にかかる電圧 V_{R_L}，抵抗 R_L に流れる電流 I_{R_L}，抵抗 R_L で消費される電力 $P(R_L)$ を求めなさい．また，$f(R_L)=\frac{1}{P(R_L)}$ として，$f(R_L)$ の最小値を求めることで，$P(R_L)$ を最大とする R_L を求めなさい．

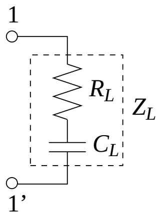


図 2

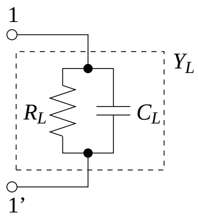


図 3

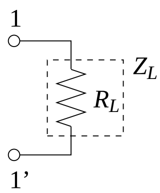
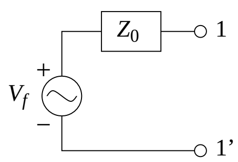


図 4

演習解答

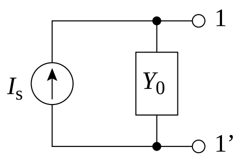
(a)



$$Z_0 = \frac{j\omega LR}{R+j\omega L} = \frac{(\omega L)^2 R + j\omega LR^2}{R^2+(\omega L)^2}$$

$$V_f = \frac{j\omega L}{R+j\omega L}V$$

(b)



$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}$$

$$I_s = \frac{V}{R}$$

(c) 設問 (a) の回路に負荷 Z_L を接続し，最大電力伝送定理より共役整合条件を求めると

$$Z_{L,opt} = Z_0^*$$

$$\left(Z_0 = R_0 + jX_0 = \frac{(\omega L)^2 R}{R^2+(\omega L)^2} + j\frac{\omega LR^2}{R^2+(\omega L)^2} \right)$$

$$R_{L,opt} = R_0 = \frac{(\omega L)^2 R}{R^2+(\omega L)^2}$$

$$\frac{1}{j\omega C_{L,opt}} = -jX_0 \quad \rightarrow \quad C_{L,opt} = \frac{1}{\omega X_0} = \frac{R^2+(\omega L)^2}{\omega^2 LR^2}$$

$$P_{\max} = \frac{|V_f|^2}{4R_0} = \frac{\dfrac{(\omega L)^2}{R^2+(\omega L)^2}|V|^2}{4\cdot\dfrac{(\omega L)^2 R}{R^2+(\omega L)^2}} = \frac{|V|^2}{4R}$$

(d) 設問 (b) の回路に負荷 Y_L を接続し，最大電力伝送定理より共役整合条件を求めると

$$Y_{L,opt} = Y_0^*$$

$$\left(\begin{array}{l} Y_0 = G_0 + jB_0 = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{j\omega L} \\ Y_L = \dfrac{1}{R_L} + j\omega C_L \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{R_{L,opt}} = G_0 = \frac{1}{R} \qquad \rightarrow \qquad R_{L,opt} = R$$

$$j\omega C_{L,opt} = -jB_0 = j\frac{1}{\omega L} \qquad \rightarrow \qquad C_{L,opt} = \frac{1}{\omega^2 L}$$

$$P_{\max} = \frac{|I_s|^2}{4G_0} = \frac{\left|\dfrac{V}{R}\right|^2}{4\cdot\dfrac{1}{R}} = \frac{|V|^2}{4R}$$

(e) テブナン等価回路を用いると，抵抗 R_L にかかる電圧 V_{R_L} は

$$V_{R_L} = \frac{R_L}{Z_0+R_L}V_f = \frac{R_L}{\frac{j\omega LR}{R+j\omega L}+R_L}\cdot\frac{j\omega L}{R+j\omega L}V = \frac{j\omega LR_L}{j\omega LR + R_L(R_L+j\omega L)}V = \frac{j\omega LR_L}{R_LR+j\omega L(R+R_L)}V$$

電流 I_{R_L} は

$$I_{R_L} = \frac{V_f}{Z_0+R_L} = \frac{j\omega L}{R_LR+j\omega L(R+R_L)}V$$

電力 $P(R_L)$ は

$$\begin{aligned}
P(R_L) &= V_{R_L}^*\cdot I_{R_L} = \frac{-j\omega LR_L}{R_LR-j\omega L(R+R_L)}V^*\cdot\frac{j\omega L}{R_LR+j\omega L(R+R_L)}V \\
&= \frac{(\omega L)^2 R_L |V|^2}{(R_LR)^2+(\omega L)^2(R+R_L)^2} \\
f(R_L) &= \frac{1}{P(R_L)} = \frac{(R_LR)^2+(\omega L)^2(R+R_L)^2}{(\omega L)^2 R_L|V|^2} \\
&= \frac{1}{(\omega L)^2|V|^2}\left\{\left[R^2+(\omega L)^2\right]R_L + 2R\cdot(\omega L)^2 + \frac{(\omega L)^2R^2}{R_L}\right\} \\
\frac{df(R_L)}{dR_L} &= \frac{1}{(\omega L)^2|V|^2}\left\{R^2+(\omega L)^2 - \frac{(\omega L)^2R^2}{R_L^2}\right\} = 0
\end{aligned}$$

$$R_L = \frac{\omega LR}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$$

小テスト

図 1 に示す回路に対して以下の設問に答えなさい．ただし，電源の角周波数を ω とする．

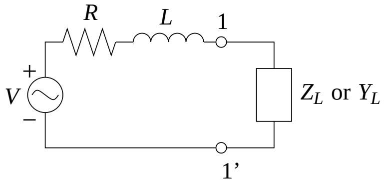


図 1

(a) 端子 $1-1'$ より左側の回路のテブナン等価回路を書き，内部インピーダンス Z_0，開放電圧 V_f を求めなさい．

(b) 端子 $1-1'$ より左側の回路のノルトン等価回路を書き，内部アドミタンス Y_0，短絡電流 I_s を求めなさい．

(c) 図 1 の回路の負荷 Z_L として，図 2 に示す回路を接続したとき，負荷 Z_L での消費電力が最大となる R_L，C_L を求めなさい．また，消費電力の最大値 $P_{\max}$ を求めなさい．

(d) 図 1 の回路の負荷 Y_L として，図 3 に示す回路を接続したとき，負荷 Y_L での消費電力が最大となる R_L，C_L を求めなさい．また，消費電力の最大値 $P_{\max}$ を求めなさい．

(e) 図 1 の回路の負荷 Z_L として，図 4 に示す回路を接続したとき，抵抗 R_L にかかる電圧 V_{R_L}，抵抗 R_L に流れる電流 I_{R_L}，抵抗 R_L で消費される電力 $P(R_L)$ を求めなさい．また，$f(R_L)=\frac{1}{P(R_L)}$ として，$f(R_L)$ の最小値を求めることで，$P(R_L)$ を最大とする R_L を求めなさい．

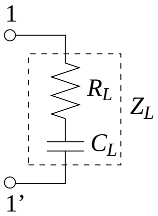


図 2

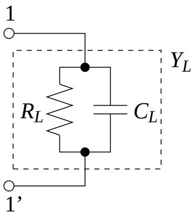


図 3

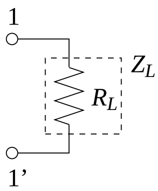
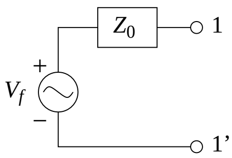


図 4

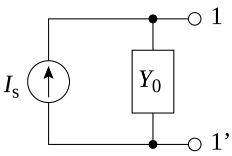
小テスト解答

(a)



$$
\begin{aligned}
Z_0 &= R + j\omega L \\
V_f &= V
\end{aligned}
$$

(b)



$$
\begin{aligned}
Y_0 &= \frac{1}{R + j\omega L} \\
I_s &= \frac{V_f}{Z_0} = \frac{V}{R + j\omega L} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}
\end{aligned}
$$

(c) 設問 (a) の回路に負荷 Z_L を接続し，最大電力伝送定理より共役整合条件を求めると

$$
\begin{aligned}
&Z_{L,opt} = Z_0^* \\
&\qquad (Z_0 = R_0 + jX_0 = R + j\omega L)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&R_{L,opt} = R_0 = R \\
&\frac{1}{j\omega C_{L,opt}} = -jX_0 \quad \rightarrow \quad C_{L,opt} = \frac{1}{\omega X_0} = \frac{1}{\omega^2 L} \\
&P_{\max} = \frac{|V_f|^2}{4R_0} = \frac{|V|^2}{4R}
\end{aligned}
$$

(d) 設問 (b) の回路に負荷 Y_L を接続し，最大電力伝送定理より共役整合条件を求めると

$$
\begin{aligned}
&Y_{L,opt} = Y_0^* \\
&\qquad \left(Y_0 = G_0 + jB_0 = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\frac{-\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&G_{L,opt} = G_0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{R_{L,opt}} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} \quad \rightarrow \quad R_{L,opt} = \frac{R^2 + (\omega L)^2}{R} \\
&B_{L,opt} = -B_0 \quad \rightarrow \quad C_{L,opt} = \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} \\
&P_{\max} = \frac{|I_s|^2}{4G_0} = \frac{\dfrac{|V|^2}{R^2 + (\omega L)^2}}{4 \cdot \dfrac{R}{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{|V|^2}{4R}
\end{aligned}
$$

(e) テブナン等価回路を用いると，抵抗 R_L にかかる電圧 V_{R_L} は

$$
V_{R_L} = \frac{R_L}{Z_0 + R_L} V_f = \frac{R_L}{R + R_L + j\omega L} V
$$

電流 I_{R_L} は

$$
I_{R_L} = \frac{V_f}{Z_0 + R_L} = \frac{V}{R + R_L + j\omega L}
$$

電力 $P(R_L)$ は

$$
\begin{aligned}
P(R_L) &= V_{R_L}^* \cdot I_{R_L} = \frac{R_L}{R + R_L - j\omega L} V^* \cdot \frac{V}{R + R_L + j\omega L} = \frac{R_L |V|^2}{(R + R_L)^2 + (\omega L)^2} \\
f(R_L) &= \frac{1}{P(R_L)} = \frac{(R + R_L)^2 + (\omega L)^2}{R_L |V|^2} = \frac{1}{|V|^2} \left\{ R_L + 2R + \frac{R^2 + (\omega L)^2}{R_L} \right\} \\
\frac{df(R_L)}{dR_L} &= \frac{1}{|V|^2} \left\{ 1 - \frac{R^2 + (\omega L)^2}{R_L^2} \right\} = 0
\end{aligned}
$$

よって

$$
R_L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}
$$