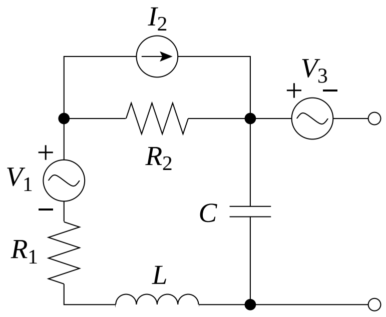
電気回路演習 II 第 8 回 (平成 20 年 6 月 6 日 (金))

演習

図の回路について以下の設問に答えなさい．ただし，電源の角周波数を ω とする．



図

(a) テブナン等価回路を求めなさい

(b) ノルトン等価回路を求めなさい
(設問 (a) の結果から求めるのではなく，内部アドミタンス，各短絡電流を計算して，等価回路を求めること)

以下の設問では $R_1 = R_2 = 1\ \Omega$，$L = \frac{1}{50\pi}$ H，$C = \frac{1}{200\pi}$ F，$V_1 = 4$ V，$I_2 = 2$ A，$V_3 = 6$ V，$f = 50$ Hz として答えなさい．

(c) 設問 (a) で求めたテブナン等価回路の内部インピーダンス Z_0，開放電圧 V_f の値を求めなさい．

(d) 設問 (b) で求めたノルトン等価回路の内部アドミタンス Y_0，短絡電流 I_s の値を求めなさい．

(e) 設問 (c)，(d) の結果から

$$Z_0 = \frac{1}{Y_0}$$
$$V_f = Z_0 I_s$$

の関係が成り立つことを示しなさい．

演習解答

(a) まず内部インピーダンス Z_0 を求めるため，電圧源は短絡，電流源は開放した回路を考えると

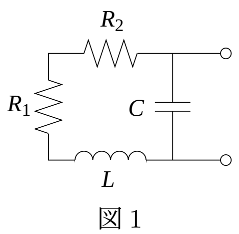


図 1

となる．図 1 の回路のインピーダンス Z_0 を求めると

$$Z_0 = \left(\frac{1}{R_1 + R_2 + j\omega L} + j\omega C\right)^{-1} = \frac{R_1 + R_2 + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega C(R_1 + R_2)}$$

次に開放電圧 V_f を求める

- V_1 のみがある場合の開放電圧 V_{f1} を求める．

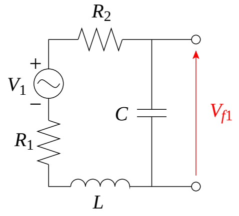


図 2

$$V_{f1} = \frac{\dfrac{1}{j\omega C}}{R_1 + R_2 + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}} V_1 = \frac{V_1}{1 - \omega^2 LC + j\omega C(R_1 + R_2)}$$

- I_2 のみがある場合の開放電圧 V_{f2} を求める．

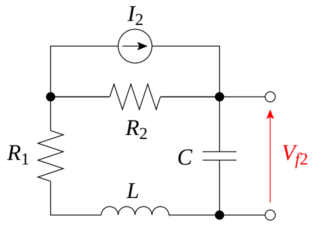


図 3

抵抗 R_2 の電位を V_2 とすると

$$I_2 = \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_2}{R_1 + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}}$$

上式より V_2 を求めると

$$V_2 = \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}} \right)^{-1} I_2 = \frac{R_2 \left(R_1 + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C} \right)}{R_1 + R_2 + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}} I_2$$

よって開放電圧 V_{f2} は

$$V_{f2} = \frac{\dfrac{1}{j\omega C}}{R_1 + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}} V_2 = \frac{\dfrac{R_2}{j\omega C}}{R_1 + R_2 + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}} I_2 = \frac{R_2}{1 - \omega^2 LC + j\omega C(R_1 + R_2)} I_2$$

- V_3 のみがある場合の開放電圧 V_{f3} を求める．

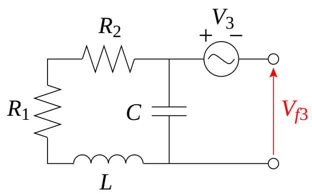


図 5

図 5 の回路では，回路に電流は流れないので

$$V_{f3} = -V_3$$

よって以上の結果よりテブナン等価回路は

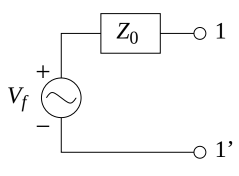


図 6

$$V_f = V_{f1} + V_{f2} + V_{f3} = \frac{V_1 + R_2 I_2}{1 - \omega^2 LC + j\omega C(R_1 + R_2)} - V_3$$

$$Z_0 = \frac{R_1 + R_2 + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega C(R_1 + R_2)}$$

(b) 内部アドミタンス Y_0 を求める

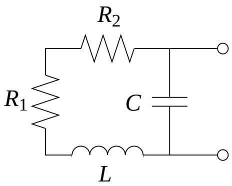


図 7

$$Y_0 = \frac{1}{R_1 + R_2 + j\omega L} + j\omega C$$

短絡電流 I_s を求める

- V_1 のみがある場合の短絡電流 I_{s1} を求める．

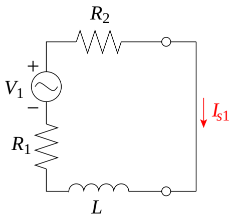


図 8

$$I_{s1} = \frac{V_1}{R_1 + R_2 + j\omega L}$$

- I_2 のみがある場合の短絡電流 I_{s2} を求める．

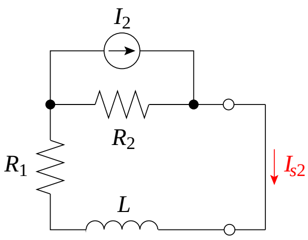


図 9

$$I_{s2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega L} I_2$$

- V_3 のみがある場合の短絡電流 I_{s3} を求める．

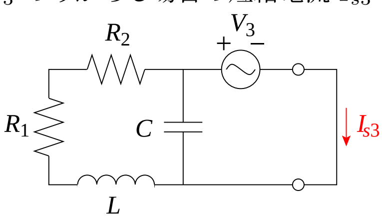


図 11

$$I_{s3} = -Y_0 V_3 = -\left(\frac{1}{R_1 + R_2 + j\omega L} + j\omega C\right) V_3$$

よって以上の結果よりノルトン等価回路は

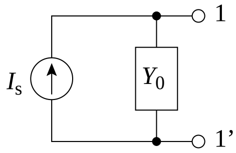


図 12

$$I_s = I_{s1} + I_{s2} + I_{s3} = \frac{V_1 + R_2 I_2 - V_3}{R_1 + R_2 + j\omega L} - j\omega C V_3$$

$$Y_0 = \frac{1}{R_1 + R_2 + j\omega L} + j\omega C$$

(c) 与えられた値に対して ωL，ωC の値は

$$\omega L = 2, \qquad \omega C = \frac{1}{2}$$

である．設問 (a) で求めた Z_0，V_f の式に値を代入すると

$$Z_0 = \frac{2 + j2}{1 - 1 + j\frac{1}{2} \cdot 2} = 2 - j2\ \Omega$$

$$V_f = \frac{4 + 2}{1 - 1 + j\frac{1}{2} \cdot 2} - 6 = -6 - j6\ \mathrm{V}$$

(d) 設問 (b) で求めた Y_0，I_s の式に値を代入すると

$$Y_0 = \frac{1}{2 + j2} + j\frac{1}{2} = \frac{2 - j2}{2^2 + 2^2} + \frac{j}{2} = \frac{1 - j}{4} + \frac{j}{2} = \frac{1 + j}{4}\ \mathrm{S}$$

$$I_s = \frac{4 + 2 - 6}{2 + j2} - j\frac{6}{2} = -j3\ \mathrm{A}$$

(e) 設問 (c) の結果 (Z_0) より

$$\frac{1}{Z_0} = \frac{1}{2 - j2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + j}{1^2 + 1^2} = \frac{1 + j}{4}\ \mathrm{S}$$

となり，設問 (d) の結果 (Y_0) と一致している．

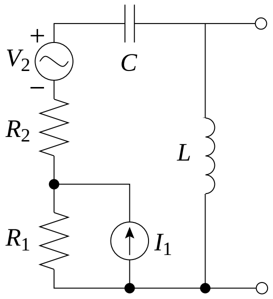
設問 (c) の結果 (Z_0) と設問 (d) の結果 (I_s) より

$$Z_0 \cdot I_s = (2 - j2)(-j3) = -6 - j6\ \mathrm{V}$$

となり，設問 (c) の結果 (V_f) と一致している．

小テスト

図の回路について以下の設問に答えなさい．ただし，電源の角周波数を ω とする．



図

(a) テブナン等価回路を求めなさい

(b) ノルトン等価回路を求めなさい

以下の設問では $R_1 = R_2 = 1\ \Omega$，$L = \frac{1}{50\pi}$ H，$C = \frac{1}{200\pi}$ F，$I_1 = 1$ A，$V_2 = 3$ V，$f = 50$ Hz として答えなさい．

(c) 設問 (a) で求めたテブナン等価回路の内部インピーダンス Z_0，開放電圧 V_f の値を求めなさい．

(d) 設問 (b) で求めたノルトン等価回路の内部アドミタンス Y_0，短絡電流 I_s の値を求めなさい．

小テスト解答

(a) 内部インピーダンス Z_0 を求めるため，

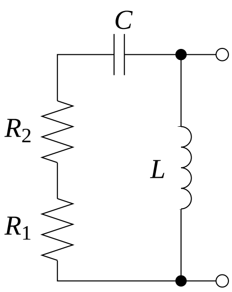


図 1

$$Z_0 = \left(\frac{1}{R_1 + R_2 + \dfrac{1}{j\omega C}} + \frac{1}{j\omega L} \right)^{-1} = \frac{\dfrac{L}{C} + j\omega L(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)} = \frac{-\omega^2 LC(R_1 + R_2) + j\omega L}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega C(R_1 + R_2)}$$

開放電圧を求める

- I_1 のみがある場合の開放電圧 V_{f1} を求める．

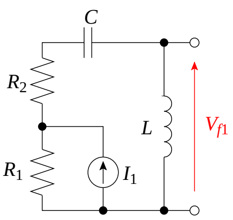


図 2

電流源 I_1 の両端の電位を V_1 とすると

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1}{R_2 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

上式から V_1 を求めると

$$V_1 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1 + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}}\right)^{-1} I_1 = \frac{R_1\left\{R_2 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right\}}{R_1 + R_2 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} I_1 = \frac{R_1\left\{\left(1-\omega^2 LC\right) + j\omega C R_2\right\}}{(1-\omega^2 LC) + j\omega C(R_1+R_2)} I_1$$

よって，開放電圧 V_{f1} は

$$V_{f1} = \frac{j\omega L}{R_2 + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}} V_1 = \frac{j\omega L R_1}{R_1 + R_2 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} I_1 = \frac{-\omega^2 LCR_1}{(1-\omega^2 LC) + j\omega C(R_1+R_2)} I_1$$

- V_2 のみがある場合の開放電圧 V_{f2} を求める．

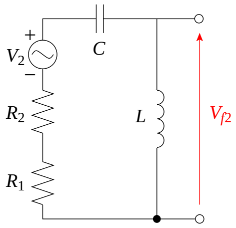


図 3

$$V_{f2} = \frac{j\omega L}{R_1 + R_2 + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}} V_2 = \frac{-\omega^2 LC}{(1-\omega^2 LC) + j\omega C(R_1+R_2)} V_2$$

以上の結果よりテブナン等価回路は

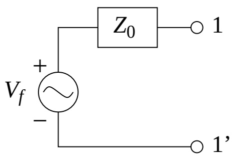


図 4

$$V_f = V_{f1} + V_{f2} = \frac{j\omega L\left(R_1 I_1 + V_2\right)}{R_1 + R_2 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{-\omega^2 LC(R_1 I_1 + V_2)}{1 - \omega^2 LC + j\omega C(R_1+R_2)}$$

$$Z_0 = \frac{\dfrac{L}{C} + j\omega L(R_1+R_2)}{R_1 + R_2 + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)} = \frac{-\omega^2 LC(R_1+R_2) + j\omega L}{(1-\omega^2 LC) + j\omega C(R_1+R_2)}$$

(b) 内部アドミタンス Y_0 を求める

$$Y_0 = \frac{1}{R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C}} + \frac{1}{j\omega L} = \frac{j\omega C}{1 + j\omega C(R_1+R_2)} + \frac{1}{j\omega L}$$

短絡電流 I_s を求める

- I_1 のみがある場合の短絡電流 I_{s1} を求める．

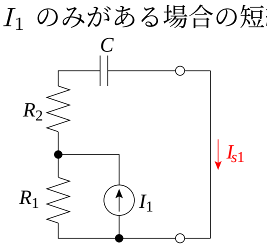


図 5

$$I_{s1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + \dfrac{1}{j\omega C}} I_1 = \frac{j\omega C R_1}{1 + j\omega C(R_1+R_2)} I_1$$

- V_2 のみがある場合の短絡電流 I_{s2} を求める．

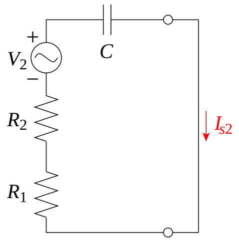


図 6

$$I_{s2} = \frac{V_2}{R_1 + R_2 + \dfrac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C V_2}{1 + j\omega C(R_1 + R_2)}$$

よって以上の結果よりノルトン等価回路は

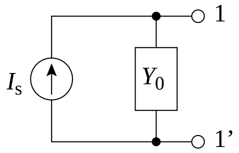


図 8

$$I_s = I_{s1} + I_{s2} = \frac{R_1 I_1 + V_2}{R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C(R_1 I_1 + V_2)}{1 + j\omega C(R_1 + R_2)}$$

$$Y_0 = \frac{j\omega C}{1 + j\omega C(R_1 + R_2)} + \frac{1}{j\omega L}$$

(c) 与えられた値に対して ωL，ωC の値は

$$\omega L = 2, \qquad \omega C = \frac{1}{2}$$

となり

$$1 - \omega^2 LC = 0$$

である．設問 (a) で求められた Z_0，V_f の式に与えら得た値を代入すると

$$Z_0 = \frac{-2 + j2}{j\frac{1}{2} \cdot 2} = 2 + j2\ \Omega$$

$$V_f = \frac{-(1+3)}{j\frac{1}{2} \cdot 2} = j4\ \mathrm{V}$$

(d) 設問 (b) え求められた Y_0，I_s の式に与えられた値を代入すると

$$Y_0 = \frac{j\frac{1}{2}}{1 + j\frac{1}{2} \cdot 2} + \frac{1}{j2} = \frac{j}{2 + j2} - \frac{j}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+j}{1^2 + 1^2} - \frac{j}{2} = \frac{1-j}{4}\ \mathrm{S}$$

$$I_s = \frac{j\frac{1}{2} \cdot (1+3)}{1 + j\frac{1}{2} \cdot 2} = \frac{j2}{1+j} = \frac{j2(1-j)}{1^2 + 1^2} = 1 + j\ \mathrm{A}$$

(d) 別解

設問 (c) の結果 (Z_0，V_f) より

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} = \frac{1}{2 + j2} = \frac{1-j}{4}\ \mathrm{S}$$

$$I_s = \frac{V_f}{Z_0} = \frac{j4}{2 + j2} = j(1-j) = 1 + j\ \mathrm{A}$$