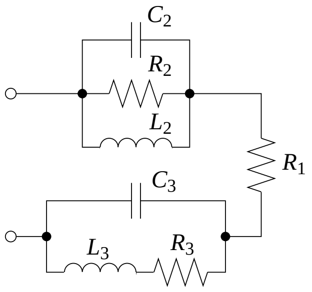
電気回路演習 II 第 7 回 (平成 20 年 5 月 30 日 (金))

演習

図の回路について以下の設問に答えなさい．ただし，電源の角周波数を ω とする．



図

(a) R_0 に関する逆回路を，直列 $\Longleftrightarrow$ 並列の変換による方法で求めなさい．

(b) R_0 に関する逆回路を，図的方法により求めなさい．

以下の設問では回路素子の値を $R_1 = 2\ \Omega$，$R_2 = \frac{25}{4}\ \Omega$，$R_3 = \frac{25}{8}\ \Omega$，$L_2 = \frac{1}{8\pi}$ H，$L_3 = \frac{1}{32\pi}$ H，$C_2 = \frac{1}{500\pi}$ F，$C_3 = \frac{1}{2500\pi}$ F，$f = 50$ Hz，$R_0 = 5\ \Omega$ として答えなさい．

(c) 元の回路のインピーダンス Z を求めなさい．

(d) 逆回路の回路素子の値を全て求めなさい．

(e) 逆回路のインピーダンス Z_r を求めなさい．

(f) 元の回路のインピーダンス Z と逆回路のインピーダンス Z_r の積が R_0^2 となることを確かめなさい．

ヒント：設問 (c),(e) でインピーダンスを計算する場合，回路全体のインピーダンスを直接計算すると計算が大変複雑となる．回路を 3 つの部分に分け，各部分のインピーダンスを個別に求めた後，回路全体のインピーダンスを求めると計算が楽になる．

演習解答

(a) 図 1 の回路の破線内をそれぞれ 1 つの素子とみなし，図 2 のように書き換え，逆回路を求めると図 3 のように書ける．

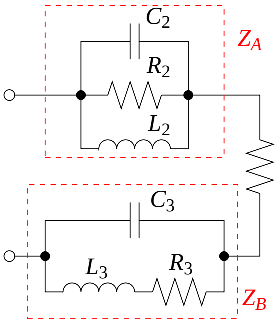


図 1

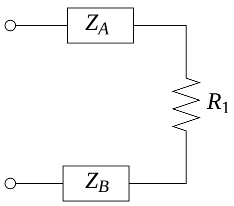


図 2

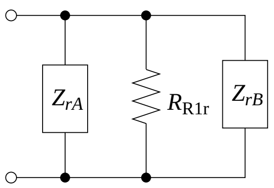


図 3

ここに $R_{R1r} = \frac{R_0^2}{R_1}$ であり，Z_{rA}，Z_{rB} はそれぞれ Z_A，Z_B の逆回路であり，図 4 のように書ける．

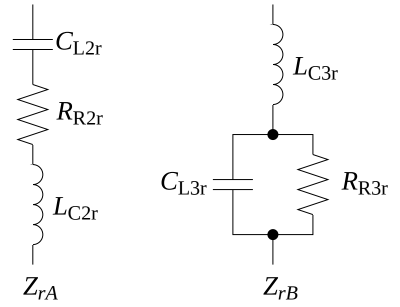


図 4

よって，図 3，図 4 から逆回路は

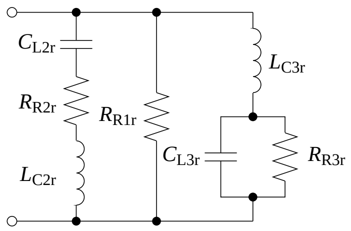


図 5

$$R_{R1r} = \frac{R_0^2}{R_1}, \quad R_{R2r} = \frac{R_0^2}{R_2}, \quad R_{R3r} = \frac{R_0^2}{R_3}$$
$$L_{C2r} = C_2 R_0^2, \quad L_{C3r} = C_3 R_0^2$$
$$C_{L2r} = \frac{L_2}{R_0^2}, \quad C_{L3r} = \frac{L_3}{R_0^2}$$

(b) 図 6 に示すように電圧源を加え，節点 0〜4 を考え，逆回路を作る．

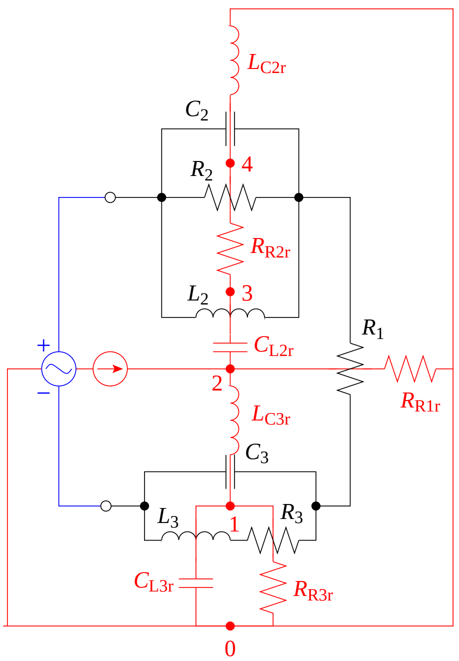


図 6

図 6 から電流源を取り除き，逆回路のみを描くと

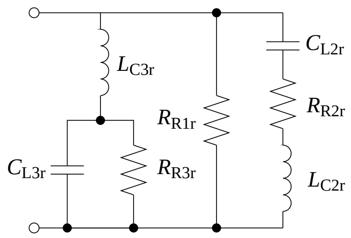


図 7

(c) 元の回路のインピーダンス Z を求めるため，R_2，L_2，C_2 の合成インピーダンス Z_2 を求めると

$$Z_2 = Y_2^{-1} = \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L_2} + j\omega C_2\right)^{-1} = \left(\frac{4}{25} - j\frac{2}{25} + j\frac{1}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{4}{25} + j\frac{3}{25}\right)^{-1}$$

$$= \frac{35}{4+j3} = 25 \cdot \frac{4-j3}{4^2+3^2} = 4 - j3\ \Omega$$

R_3，L_3，C_3 の合成インピーダンス Z_3 を求めると

$$\begin{aligned} Z_3 &= \frac{1}{\frac{1}{R_3+j\omega L_3} + j\omega C_3} = \frac{R + j\omega L_3}{1 + j\omega C_3 (R_3 + j\omega L_3)} = \frac{\frac{25}{8} + j\frac{100}{32}}{1 + j\frac{1}{25}\left(\frac{25}{8} + j\frac{100}{32}\right)} = \frac{\frac{25}{8} + j\frac{25}{8}}{\frac{7}{8} + j\frac{1}{8}} \\ &= 25 \cdot \frac{1+j}{7+j} = 25 \cdot \frac{8+j6}{49+1} = 4 + j3\ \Omega \end{aligned}$$

よって Z は

$$Z = R_1 + Z_2 + Z_3 = 2 + (4 - j3) + (4 + j3) = 10\ \Omega$$

(d) 逆回路の素子の値は

$$\begin{aligned} &R_{R1r} = \frac{R_0^2}{R_1} = \frac{25}{2}\ \Omega, \quad R_{R2r} = \frac{R_0^2}{R_2} = \frac{25}{25/4} = 4\ \Omega, \quad R_{R3r} = \frac{R_0^2}{R_3} = \frac{25}{25/8} = 8\ \Omega \\ &L_{C2r} = C_2 R_0^2 = \frac{25}{500\pi} = \frac{1}{20\pi}\ \mathrm{H}, \quad L_{C3r} = C_3 R_0^2 = \frac{25}{2500\pi} = \frac{1}{100\pi}\ \mathrm{H} \\ &C_{L2r} = \frac{L_2}{R_0^2} = \frac{1/8\pi}{25} = \frac{1}{200\pi}\ \mathrm{F}, \quad C_{L3r} = \frac{L_3}{R_0^2} = \frac{1/32\pi}{25} = \frac{1}{800\pi}\ \mathrm{F} \end{aligned}$$

(e) 逆回路のインピーダンス Z_r を求めるため，まず，R_{R2r}，L_{C2r}，C_{L2r} の合成インピーダンス Z_{2r} を求めると

$$Z_{2r} = R_{R2r} + j\omega L_{C2r} + \frac{1}{j\omega C_{L2r}} = 4 + j\frac{2\pi \cdot 50}{20\pi} + \frac{1}{j\frac{2\pi\cdot 50}{200\pi}} = 4 + j5 - j2 = 4 + j3\ \Omega$$

R_{R3r}，L_{C3r}，C_{L3r} の合成インピーダンス Z_{3r} を求めると

$$Z_{3r} = j\omega L_{C3r} + \frac{1}{\frac{1}{R_{R3r}} + j\omega C_{L3r}} = j\frac{2\pi \cdot 50}{100\pi} = \frac{1}{\frac{1}{8} + j\frac{2\pi\cdot 50}{800\pi}} = j + \frac{8}{1+j} = j + 8 \cdot \frac{1-j}{1^2+1^2} = 4 - j3\ \Omega$$

よって合成インピーダンス Z_r は

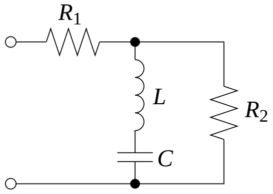
$$\begin{aligned} Z_r &= \left(\frac{1}{R_{R1r}} + \frac{1}{Z_{r2}} + \frac{1}{Z_{r3}}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{25} + \frac{1}{4+j3} + \frac{1}{4-j3}\right) = \left(\frac{2}{25} + \frac{4-j3+4+j3}{4^2+3^2}\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{10}{25}\right)^{-1} = \frac{5}{2}\ \Omega \end{aligned}$$

(f) 設問 (c),(e) の結果から

$$Z \cdot Z_r = 10 \cdot \frac{5}{2} = 5^2 = R_0^2$$

小テスト

図の回路において以下の設問に答えなさい．ただし，電源の角周波数を ω とする．



図

(a) R_0 に関する逆回路を，直列 $\Longleftrightarrow$ 並列の変換による方法で求めなさい．

(b) R_0 に関する逆回路を，図的方法により求めなさい．

(c) 元の回路のインピーダンス Z と逆回路のインピーダンス Z_r を求め，また，$Z \cdot Z_r = R_0^2$ の関係が成り立つことを示しなさい．ただし，$R_1 = 2\ \Omega$，$R_2 = 1\ \Omega$，$L = \frac{1}{20\pi}$ H，$C = \frac{1}{400\pi}$ F，$f = 50$ Hz，$R_0 = 2\ \Omega$ とする．

小テスト解答

(a) 図 1 の回路の破線内を 1 つの素子とみなし，図 2 のように書き換え，逆回路を求めると図 3 のように書ける．

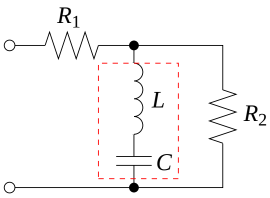


図 1

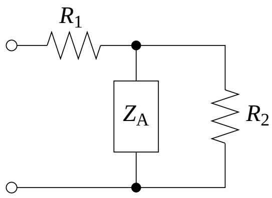


図 2

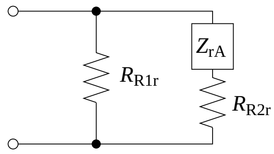


図 3

ここに Z_{rA} は Z_A の逆回路であり，

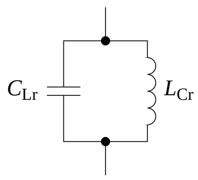
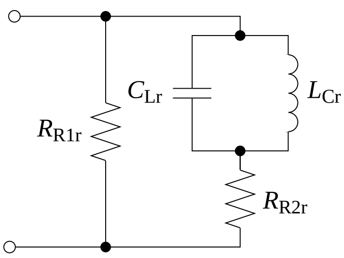


図 4

と書ける．また，R_{R1r}，R_{R2r} は

$$R_{R1r} = \frac{R_0^2}{R_1}, \qquad R_{R2r} = \frac{R_0^2}{R_2}$$

である．よって，図 3，図 4 から逆回路は



$$R_{R1r} = \frac{R_0^2}{R_1}, \qquad R_{R2r} = \frac{R_0^2}{R_2}, \qquad L_{Cr} = CR_0^2, \qquad C_{Lr} = \frac{L}{R_0^2}$$

図 5

(b) 図 6 に示すように電圧源を加え，節点 0〜2 を考え逆回路を作る．

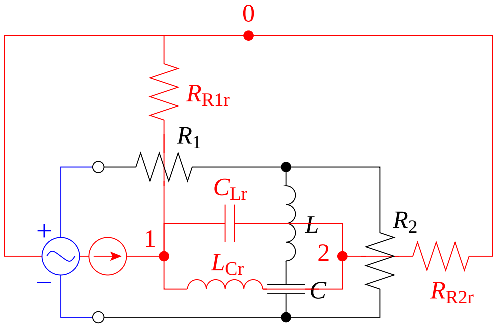


図 6

図 6 から電流源を取り除き，逆回路のみを描くと

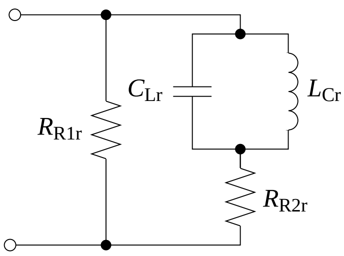


図 7

(c) 元の回路のインピーダンス Z は

$$\begin{aligned} Z &= R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}} = 2 + \frac{1}{1 + \cfrac{1}{j\cfrac{2\pi \cdot 50}{20\pi} + \cfrac{1}{j\cfrac{2\pi \cdot 50}{400\pi}}}} = 2 + \frac{1}{1 + \cfrac{1}{j5 - j4}} \\ &= 2 + \frac{1}{1-j} = 2 + \frac{1+j}{1^2+1^2} = \frac{5+j}{2}\ \Omega \end{aligned}$$

逆回路の素子の値を求めると

$$R_{R1r} = \frac{R_0^2}{R_1} = \frac{2^2}{2} = 2\ \Omega, \qquad R_{R2r} = \frac{R_0^2}{R_2} = \frac{2^2}{1} = 4\ \Omega$$

$$L_{Cr} = CR_0^2 = \frac{2^2}{400\pi} = \frac{1}{100\pi}\ \mathrm{H}, \qquad C_{Lr} = \frac{L}{R_0^2} = \frac{\frac{1}{20\pi}}{2^2} = \frac{1}{80}\ \mathrm{F}$$

逆回路のインピーダンス Z_r は

$$\begin{aligned} Z_r &= \left(\frac{1}{R_{R1r}} + \cfrac{1}{R_{R2r} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{j\omega L_{Cr}} + j\omega C_{Lr}}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{2} + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{-j + j\frac{5}{4}}} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4 - j4} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1+j}{1^2+1^2} \right)^{-1} = \left(\frac{5+j}{8} \right)^{-1} = \frac{8}{5+j} \\ &= \frac{8(5-j)}{25+1} = \frac{8(5-j)}{26}\ \Omega \end{aligned}$$

Z と Z_r の積を求めると

$$\frac{5+j}{2} \cdot \frac{8(5-j)}{26} = \frac{2}{13}(25+1) = 2^2 = R_0^2$$