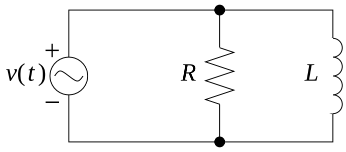
電気回路演習 II 第 1 回 (平成 20 年 4 月 11 日 (金))

演習

1. 時間的に変化する電流 $i_R(t)$ が抵抗 R に流れるとき，抵抗にかかる電圧 $v_R(t)$ を表す式を書きなさい．また，コイル L，コンデンサ C にそれぞれ $i_L(t)$，$i_C(t)$ が流れるとき，それぞれにかかる電圧 $v_L(t)$，$v_C(t)$ を表す式を書きなさい．

2. 図に示す RL 並列回路に $v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$ なる正弦波電圧が加えられているとする．以下の設問に答えなさい．



   (a) 抵抗 R に流れる電流 $i_R(t)$ を求めなさい．また，$\theta = 0$ として抵抗 R の平均消費電力 P_R を求めなさい．

   (b) コイル L に流れる電流 $i_L(t)$ を求めなさい．また $\theta = 0$ としてコイル L の平均消費電力 P_L を求めなさい．

   (c) $v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$ を複素量 (複素表示) で表しなさい．

   (d) 設問 (c) の結果を用いて，コイル L に流れる電流の複素表示 I_L を求めなさい．また，複素電流 I_L から電流の瞬時値 $i_L(t)$ を求め，この $i_L(t)$ が設問 (b) で求めた電流 $i_L(t)$ に一致することを示しなさい．

演習解答

1. $v_R(t) = Ri_R(t), \qquad v_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt}, \qquad v_C(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_C(t)dt$

2. (a) 抵抗 R に流れる電流は

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_m}{R}\sin(\omega t + \theta)$$

正弦波の周期を T，$\theta = 0$ として，抵抗 R で消費される瞬時電力を 1 周期にわたって積分し，平均を求めると

$$P_R = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\cdot i_R(t)dt = \frac{V_m^2}{TR}\int_0^T \sin^2\omega t dt = \frac{V_m^2}{TR}\int_0^T \frac{1}{2}(1-\cos 2\omega t)\,dt = \frac{V_m^2}{2TR}\left[t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right]_0^T$$

ここで $T = \frac{2\pi}{\omega}$ を考慮すると，上式の [　] 内の第 2 項は 0 となるので

$$P_R = \frac{V_m^2}{2R}$$

   (b) コイル L に流れる電流 $i_L(t)$ は

$$v(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = V_m\sin(\omega t + \theta)$$

上式を t で積分すると

$$i_L(t) = \frac{V_m}{L}\int \sin(\omega t + \theta)dt = -\frac{V_m}{\omega L}\cos(\omega t + \theta)$$

設問 (a) での平均電力の計算と同様にして

$$P_L = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\cdot i_L(t)dt = -\frac{V_m^2}{T\omega L}\int_0^T \sin\omega t\cdot\cos\omega t dt = -\frac{V_m^2}{T\omega L}\int_0^T \frac{1}{2}\sin 2\omega t dt = -\frac{V_m^2}{T\omega L}\left[-\frac{\cos 2\omega t}{4\omega}\right]_0^T$$

ここで $T = \frac{2\pi}{\omega}$ を考慮すると

$$P_L = -\frac{V_m^2}{T\omega L}\cdot\frac{1}{4\omega}(-1+1) = 0$$

(c) $v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$ を複素表示すると

$$V = V_m e^{j(\omega t + \theta)}$$

(d) $v(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt}$ を積分すると

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int v(t)dt$$

となり，上式に設問 (c) で求めた複素表示を考慮すると

$$I_L = \frac{1}{L}\int V_m e^{j(\omega t+\theta)}dt = \frac{V_m}{j\omega L}e^{j(\omega t+\theta)}$$

(別解)　複素表示された電流 I_L に対する微分は

$$\frac{dI_L}{dt} = j\omega I_L$$

となる．よって $v(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt}$ の複素表示は

$$V = L\cdot(j\omega I_L)$$

となり

$$I_L = \frac{V}{j\omega L} = \frac{V_m}{j\omega L}e^{j(\omega t+\theta)} = \frac{V_m}{\omega L}e^{j\left(\omega t+\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$$

瞬時電流 $i_L(t)$ は複素表示された電流 I_L の虚部から得られるので

$$i_L(t) = \mathrm{Im}\left\{\frac{V_m}{\omega L}e^{j\left(\omega t+\theta-\frac{\pi}{2}\right)}\right\} = \frac{V_m}{\omega L}\sin\left(\omega t+\theta-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{V_m}{\omega L}\cos(\omega t+\theta)$$

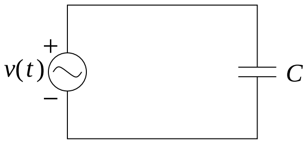
(別解)

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \mathrm{Im}\left\{\frac{V_m}{j\omega L}e^{j(\omega t+\theta)}\right\} = \frac{V_m}{\omega L}\mathrm{Im}\Big\{-j\cos(\omega t+\theta)+\sin(\omega t+\theta)\Big\} \\ &= -\frac{V_m}{\omega L}\cos(\omega t+\theta) \end{aligned}$$

上式は設問 (b) で求めた $i_L(t)$ と同じである．

小テスト

図に示すように正弦波電圧 $v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$ がコンデンサ C に加えられているとする．以下の設問に答えなさい．



(a) コンデンサ C に流れる電流 $i_C(t)$ を求めなさい．

(b) $\theta = 0$ としてコンデンサ C の平均消費電力 P_C を求めなさい．

(c) 正弦波電圧 $v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$ の複素表示を $V = V_m e^{j(\omega t + \theta)}$ として，コンデンサ C に流れる電流の複素表示 I_C を求めなさい．

(d) 設問 (c) の結果から電流の瞬時値 $i_C(t)$ を求め，この $i_C(t)$ が設問 (a) の結果と一致していることを示しなさい．

小テスト解答

(a) コンデンサ C に流れる電流 $i_C(t)$ と電圧 $v(t)$ の関係は

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i_C(t)dt = V_m \sin(\omega t + \theta)$$

上式を t で微分すると

$$i_C(t) = \omega C V_m \cos(\omega t + \theta)$$

(b) 正弦波の周期を T，$\theta = 0$ として，コンデンサ C で消費される瞬時電力を 1 周期にわたり積分し，周期 T で割り，平均を求めると

$$P_C \;=\; \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\cdot i_C(t)dt = \frac{\omega C V_m^2}{T}\int_0^T \sin\omega t \cdot \cos\omega t dt = \frac{\omega C V_m^2}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\sin 2\omega t dt = \frac{\omega C V_m^2}{T}\left[-\frac{\cos 2\omega t}{4\omega}\right]_0^T$$

ここで $T = \frac{2\pi}{\omega}$ を考慮すると

$$P_C = \frac{\omega C V_m^2}{T}\left[-\frac{\cos 2\omega t}{4\omega}\right]_0^T = \frac{\omega C V_m^2}{4T}(-1+1) = 0$$

よって

$$P_C = 0$$

(c) $v(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_C(t)dt$ を微分すると

$$i_C(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

となる．上式に $v(t)$ の複素表示を考慮すると

$$I_C = C\frac{dV}{dt} = C\frac{d}{dt}\left\{V_m e^{j(\omega t + \theta)}\right\} = j\omega C V_m e^{j(\omega t + \theta)} = \omega C V_m e^{j\left(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2}\right)}$$

(別解)　複素表示された電流 I_C に対する積分は

$$\int I_C dt = \frac{I_C}{j\omega}$$

となる．よって $v(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_C(t)dt$ の複素表示は

$$V = \frac{I_C}{j\omega C}$$

となり，上式より I_C は

$$I_C = j\omega C V = j\omega C V_m e^{j(\omega t+\theta)} = \omega C V_m e^{j\left(\omega t+\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$$

(d) 瞬時電流 $i_C(t)$ は複素表示された電流 I_C の虚部から得られるので

$$i_C(t) = \mathrm{Im}\left\{\omega C V_m e^{j\left(\omega t+\theta+\frac{\pi}{2}\right)}\right\} = \omega C V_m \sin\left(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2}\right) = \omega C V_m \cos(\omega t + \theta)$$

上式は設問 (a) で求めた結果と同じである