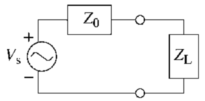
最大電力伝送定理

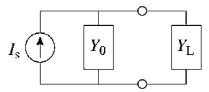
負荷インピーダンスと電源の内部インピーダンスが複素共役の関係(共役整合)にあるとき、負荷に供給される電力は最大になる



$$P=\frac{R_L|V_s|^2}{(R_0+R_L)^2+(X_0+X_L)^2}$$

$$Z_{L,opt}=Z_0^* \quad \Rightarrow \quad P_{\max}=\frac{|V_s|^2}{4R_0}$$

$$\begin{pmatrix} R_{L,opt}=R_0 \\ X_{L,opt}=-X_0 \end{pmatrix}$$



$$P=\frac{G_L|I_s|^2}{(G_0+G_L)^2+(B_0+B_L)^2}$$

$$Y_{L,opt}=Y_0^* \quad \Rightarrow \quad P_{\max}=\frac{|I_s|^2}{4G_0}$$

$$\begin{pmatrix} G_{L,opt}=G_0 \\ B_{L,opt}=-B_0 \end{pmatrix}$$

最大電力伝送定理の証明

$$P=\frac{R_L|V_s|^2}{(R_0+R_L)^2+(X_0+X_L)^2}$$

分母を最小化する $\boxed{X_L=-X_0}$

$$P=\frac{R_L|V_s|^2}{(R_0+R_L)^2}=\frac{|V_s|^2}{R_0\left(\sqrt{\frac{R_0}{R_L}}+\sqrt{\frac{R_L}{R_0}}\right)^2}=\frac{|V_s|^2}{R_0\left(x+\frac{1}{x}\right)^2} \qquad \left(x=\sqrt{\frac{R_0}{R_L}}\right)$$

分母を最小化する $x=\frac{1}{x}=1$

$\boxed{R_L=R_0}$

$$\boxed{P=\frac{|V_s|^2}{4R_0}}$$

x が正の実数のとき

$x+\frac{1}{x}\geq 2$

等号は $x=1/x=1$ のとき

R_L のみが変化できるとき

$$\frac{\partial P}{\partial R_L}=\frac{\left\{(R_0+R_L)^2+(X_0+X_L)^2\right\}-2R_L(R_0+R_L)}{\left\{(R_0+R_L)^2+(X_0+X_L)^2\right\}^2}|V_s|^2$$

$$=\frac{\left\{(R_0+R_L)(R_0-R_L)+(X_0+X_L)^2\right\}}{\left\{(R_0+R_L)^2+(X_0+X_L)^2\right\}^2}|V_s|^2$$

$$=\frac{\left\{R_0^2-R_L^2+(X_0+X_L)^2\right\}}{\left\{(R_0+R_L)^2+(X_0+X_L)^2\right\}^2}|V_s|^2=0 \quad \Rightarrow \quad R_L=\sqrt{R_0^2+(X_0+X_L)^2}$$

微分による最大･最小の計算

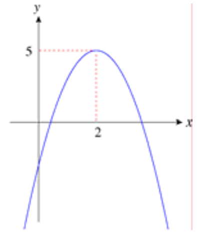
$$y=-2x^2+8x-3 \longrightarrow y=-2(x-2)^2+5$$

$\frac{\partial y}{\partial x}=0$ で極値

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-4x+8=0$$

$$\therefore\ x=2$$

$$y|_{x=2}=-2\cdot 2^2+8\cdot 2-3=5$$



R_L のみが変化できるとき (別解)

$P(R_L)$の最大条件を求める代わりに$f(R_L)=\frac{1}{P(R_L)}$の最小条件を求める

$$f(R_L)=\frac{1}{|V_s|^2}\frac{(R_0+R_L)^2+(X_0+X_L)^2}{R_L}=\frac{1}{|V_s|^2}\left(R_L+2R_0+\frac{R_0^2+(X_0+X_L)^2}{R_L}\right)$$

R_Lで微分

$$\frac{df(R_L)}{dR_L}=\frac{1}{|V_s|^2}\left(1-\frac{R_0^2+(X_0+X_L)^2}{R_L^2}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad R_L=\sqrt{R_0^2+(X_0+X_L)^2}$$