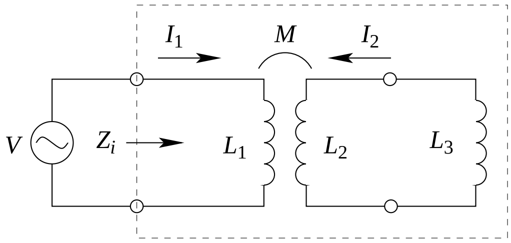
問題

下図の回路の入力インピーダンスを以下の手順で求めよ．電源の角周波数は ω とする．
(a) １次回路にキルヒホッフの電圧則を適用し回路方程式を立てる
(b) ２次回路にキルヒホッフの電圧則を適用し回路方程式を立てる
(c) (b) の式を I_2 に関して解く
(d) (c) の結果を (a) に代入して $Z_i(=V/I_1)$ を求める



解答

(a) $V = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2$

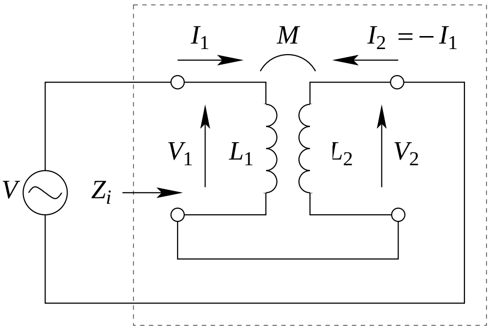
(b) $0 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 + j\omega L_3 I_2$

(c) $I_2 = \dfrac{-M}{L_2 + L_3} I_1$

(d) $Z_i = \dfrac{V}{I_1} = j\omega \left(L_1 - \dfrac{M^2}{L_2 + L_3} \right)$

問題

下図の回路の入力インピーダンスを以下の手順で求めよ．電源の角周波数は ω とする．
(a) １次コイルにかかる電圧 V_1 を I_1 を用いて表す
(b) ２次コイルにかかる電圧 V_2 を I_1 を用いて表す
(c) キルヒホッフの電圧則より回路方程式を立てる
(d) 入力インピーダンス $Z_i(= V/I_1)$ を求める



解答

(a) $V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 = j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_1$

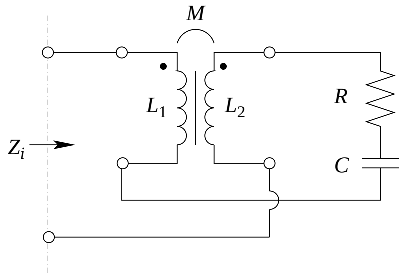
(b) $V_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 = j\omega M I_1 - j\omega L_2 I_1$

(c) $V = V_1 - V_2 = j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_1 - j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_1$

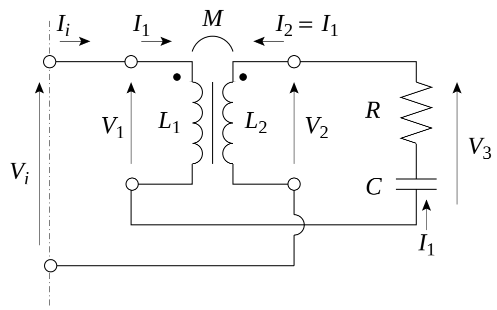
(d) $Z_i = \dfrac{V}{I_1} = j\omega(L_1 + L_2 - 2M)$

問題

下図の回路の入力インピーダンス Z_i を求め，共振角周波数を求めよ．



解答



$I_1 = I_i$ であるので，各部の電圧は以下の様に表される．

$$
\begin{aligned}
V_1 &= j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 = j\omega(L_1 + M)I_i \\
V_2 &= j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 = j\omega(M + L_2)I_i \\
V_3 &= -\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) I_i
\end{aligned}
$$

入力端での電圧 V_i は

$$
V_i = V_1 - V_3 + V_2 = \left\{ j\omega(L_1 + L_2 + 2M) + \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\right\} I_i
$$

よって，入力インピーダンスは

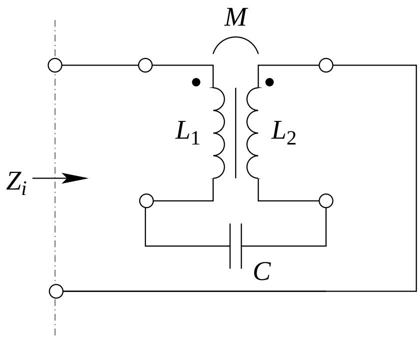
$$
\begin{aligned}
Z_i &= \frac{V_i}{I_i} = \left\{ j\omega(L_1 + L_2 + 2M) + \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\right\} \\
&= R + j\frac{\{\omega^2 C\,(L_1 + L_2 + 2M) - 1\}}{\omega C} \\
&= R_i + jX_i
\end{aligned}
$$

$X_i = 0$ となる直列共振角周波数は以下のように求まる

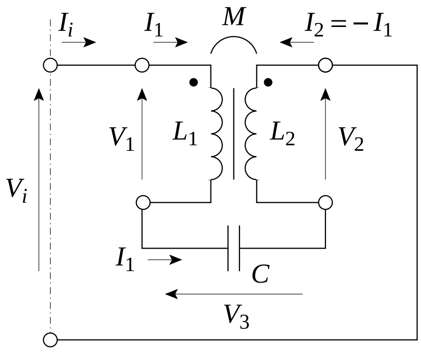
$$
\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{C(L_1 + L_2 + 2M)}}
$$

問題

下図の回路の入力インピーダンス Z_i を求め，共振角周波数を求めよ．



解答



$I_1 = I_i$ であるので，各部の電圧は以下の様に表される．

$$
\begin{aligned}
V_1 &= j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 = j\omega(L_1 - M)I_i \\
V_2 &= j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 = j\omega(M - L_2)I_i \\
V_3 &= \frac{1}{j\omega C} I_i
\end{aligned}
$$

入力端での電圧 V_i は

$$
V_i = V_1 + V_3 - V_2 = \left\{ j\omega(L_1 + L_2 - 2M) + \frac{1}{j\omega C} \right\} I_i
$$

よって，入力インピーダンスは

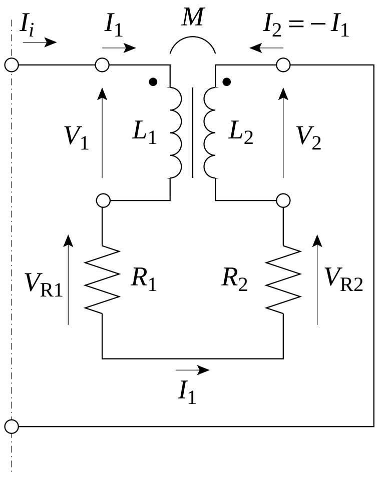
$$
\begin{aligned}
Z_i &= \frac{V_i}{I_i} = \left\{ j\omega(L_1 + L_2 - 2M) + \frac{1}{j\omega C} \right\} \\
&= j\frac{\{\omega^2 C\,(L_1 + L_2 - 2M) - 1\}}{\omega C} \\
&= jX_i
\end{aligned}
$$

$X_i = 0$ となる直列共振角周波数は以下のように求まる

$$
\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{C(L_1 + L_2 - 2M)}}
$$

問題

一点鎖線の左から右を見込んだ入力インピーダンスを求めよ



解答

$I_1 = I_i$ であるので，各部の電圧は以下の様に表される．

$$
\begin{aligned}
V_1 &= j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 = j\omega(L_1 - M)I_i \\
V_2 &= j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 = j\omega(M - L_2)I_i \\
V_{R1} &= R_1 I_1 = R_1 I_i \\
V_{R2} &= -R_2 I_1 = -R_2 I_i
\end{aligned}
$$

入力端での電圧 V_i は

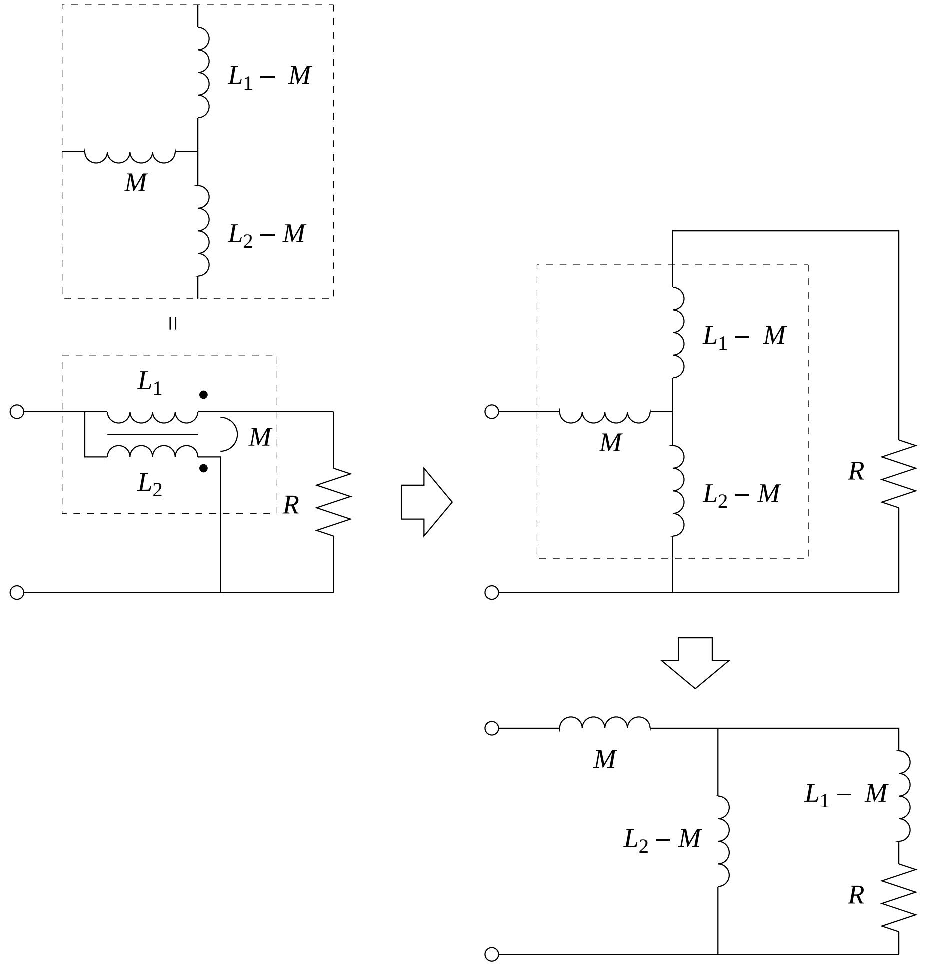
$$V_i = V_1 + V_{R1} - V_{R2} - V_2 = \{j\omega(L_1 + L_2 - 2M) + (R_1 + R_2)\}\, I_i$$

よって，入力インピーダンスは

$$Z_i = \frac{V_i}{I_i} = (R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)$$

問題

図の変成器を含む回路の端子間の入力インピーダンスを求めよ．



解答

変成器を T 形等価回路で置き換えて回路を整理した後に入力インピーダンス Z_i を計算すると，以下のように表される．

$$
\begin{aligned}
Z_i &= j\omega M + [j\omega(L_2 - M)//\{R + j\omega(L_1 - M)\}] \\
&= j\omega M + \frac{j\omega(L_2 - M)\{R + j\omega(L_1 - M)\}}{R + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)} \\
&= \frac{j\omega R L_2 - \omega^2(L_1 L_2 - M^2)}{R + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)} \\
&= \frac{\omega^2(L_2 - M)^2}{R^2 + \omega^2(L_1 + L_2 - 2M)^2} + j\omega\frac{(L_1 L_2 - M^2)(L_1 + L_2 - 2M)}{R^2 + \omega^2(L_1 + L_2 - 2M)^2}
\end{aligned}
$$

問題

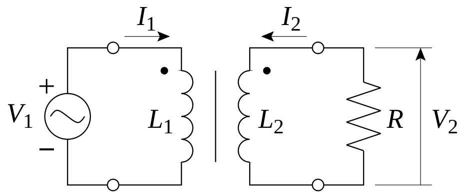
図に示す変成器を含む回路で，1 次側の電圧 V_1 と 2 次側の電圧 V_2 の比 V_1/V_2 を求めなさい．電流 I_1 と電流 I_2 の比 I_1/I_2 を求めなさい．ここに 角周波数を ω，変成器の相互インダクタンスを M，1 次側，2 次側の自己インダクタンスをそれぞれ L_1，L_2 とする．

また変成器が密結合変成器であるとして，

(a) $V_1 = 100$ [V]，$L_1 = 2$ [H]，$L_2 = 8$ [H]

(b) $V_1 = 100$ [V]，$L_1 = 2$ [H]，$L_2 = 1$ [H]

のときの電圧 V_2 を求めなさい．なお，$\sqrt{2} = 1.414$ とする．



解答

電圧 V_1，V_2 と電流 I_1，I_2 の関係は変成器の基本式より

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \tag{1}$$

$$V_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 \tag{2}$$

また，電圧 V_2 と電流 I_2 は

$$V_2 = -RI_2 \tag{3}$$

式 (3) を用いて，式 (1),(2) の I_2 を消去

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 - \frac{j\omega M}{R} V_2 \tag{4}$$

$$V_2 = j\omega M I_1 - \frac{j\omega L_2}{R} V_2 \tag{5}$$

式 (5) より

$$I_1 = \frac{1}{j\omega M}\left(1 + \frac{j\omega L_2}{R}\right) V_2 \tag{6}$$

式 (6) を式 (4) に代入

$$V_1 = \left\{\frac{L_1}{M}\left(1 + \frac{j\omega L_2}{R}\right) - \frac{j\omega M}{R}\right\} V_2 = \left\{\frac{L_1}{M} + \frac{j\omega}{RM}\left(L_1 L_2 - M^2\right)\right\} V_2 \tag{7}$$

$$\therefore \ \frac{V_1}{V_2} = \frac{L_1}{M} + \frac{j\omega}{RM}\left(L_1 L_2 - M^2\right) \tag{8}$$

式 (6) に式 (3) を代入

$$I_1 = -\frac{R}{j\omega M}\left(1 + \frac{j\omega L_2}{R}\right) I_2 \tag{9}$$

$$\therefore \ \frac{I_1}{I_2} = -\frac{R + j\omega L_2}{j\omega M} \tag{10}$$

密結合変成器 $\left(\dfrac{M^2}{L_1 L_2} = 1\right)$ の場合，式 (8) は

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{L_1}{M} \quad \rightarrow \quad V_2 = \frac{M}{L_1} V_1 = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} V_1 \tag{11}$$

(a) $V_2 = \sqrt{\dfrac{8}{2}} \cdot 100 = 200$ V

(b) $V_2 = \sqrt{\dfrac{1}{2}} \cdot 100 = 70.7$ V

問題

変成器の 2 次側にインピーダンス Z_L が接続された回路がある (図 1)．角周波数を ω，変成器の相互インダクタンスを M (>0)，1 次側，2 次側の自己インダクタンスをそれぞれ L_1，L_2 とする．

(a) 変成器の基本式を示しなさい．

次に，図 2 に示す T 形回路を考える．

(b) 電圧 V_1，V_2，電流 I_1，I_2 の関係式を求め，式 (1),(2) の $\boxed{\quad\quad}$ を埋め，式を完成させなさい．式 (1)　$V_1 = \boxed{\quad\quad} I_1 + \boxed{\quad\quad} I_2$
式 (2)　$V_2 = \boxed{\quad\quad} I_1 + \boxed{\quad\quad} I_2$

(c) 設問 (a) の基本式と設問 (b) の式 (1),(2) の比較をとおして，図 2 の回路が図 1 の変成器部分の等価回路となるように，Z_1，Z_2，Z_3 を L_1，L_2，M で表しなさい．

(d) 設問 (c) の結果から図 1 の回路を T 形等価回路で置き換えた回路を書きなさい．

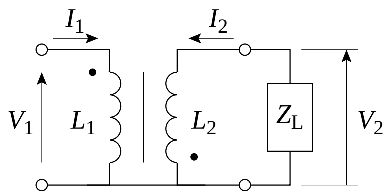


図 1

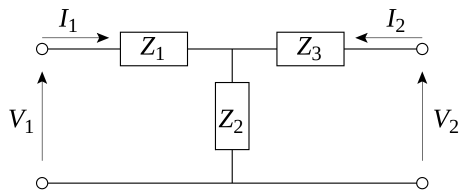


図 2

解答

(a)

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2$$
$$V_2 = -j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2$$

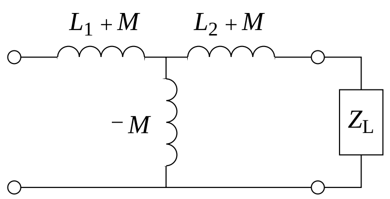
(b)

$$V_1 = Z_1 I_1 + Z_2(I_1 + I_2) = (Z_1 + Z_2) I_1 + Z_2 I_2$$
$$V_2 = Z_3 I_2 + Z_2(I_1 + I_2) = Z_2 I_1 + (Z_2 + Z_3) I_2$$

(c)

$$\left.\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= j\omega L_1 \\ Z_2 &= -j\omega M \\ Z_2 + Z_3 &= j\omega L_2 \end{aligned}\right\} \to \begin{aligned} Z_1 &= j\omega(L_1 + M) \\ Z_2 &= -j\omega M \\ Z_3 &= j\omega(L_2 + M) \end{aligned}$$

(d)



問題

図 1 に示す変成器を含む回路について以下の問いに答よ.

(a) 端子 $1-1'$ から見た入力インピーダンスを求めよ.

(b) 変成器が理想変成器であるとし，1 次側，2 次側の巻数比を $1:n$ としたときの入力インピーダンスを求めよ.

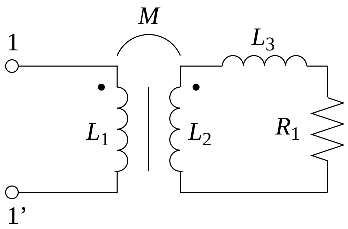


図 1

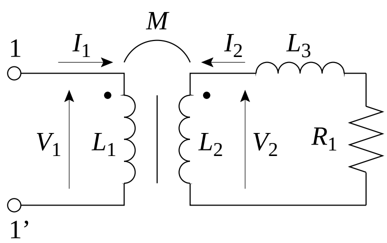
解答

noindent **問 1 (a)**

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \tag{12}$$
$$V_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 \tag{13}$$
$$V_2 = -(R_1 + j\omega L_3) I_2 \tag{14}$$

(2) と (3) より

$$j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 = -(R_1 + j\omega L_3) I_2$$
$$I_2 = \frac{-j\omega M}{R_1 + j\omega(L_2 + L_3)} I_1 \tag{15}$$



(4) を (1) に代入して

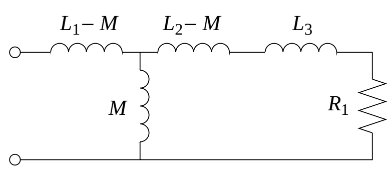
$$V_1 = j\omega L_1 I_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_1 + j\omega(L_2 + L_3)} I_1$$

よって，入力インピーダンス Z_i は

$$Z_i = \frac{V_1}{I_1} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_1 + j\omega(L_2 + L_3)}$$

問 1 (a) 別解
変成器を T 形等価回路に置き換えると

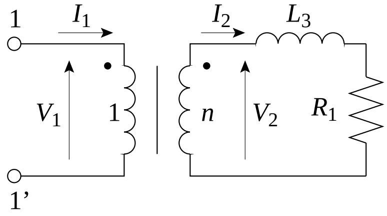
$$\begin{aligned} Z_i &= j\omega(L_1 - M) + [j\omega M // \{R_1 + j\omega(L_2 - M + L_3)\}] \\ &= j\omega(L_1 - M) + \frac{j\omega M \{R_1 + j\omega(L_2 - M + L_3)\}}{R_1 + j\omega(L_2 + L_3)} \\ &= j\omega(L_1 - M) + \frac{j\omega M \{R_1 + j\omega(L_2 + L_3)\} + \omega^2 M^2}{R_1 + j\omega(L_2 + L_3)} \\ &= j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_1 + j\omega(L_2 + L_3)} \end{aligned}$$



問１ (b)

理想変成器の場合，電圧比は巻数比になる

$$V_1 : V_2 = 1 : n \quad \rightarrow \quad V_1 = \frac{1}{n} V_2$$



理想変成器は無損失であるので

$$I_1 V_1 = I_2 V_2 \quad \rightarrow \quad I_1 = \frac{V_2}{V_1} I_2 = n I_2$$

よって

$$Z_i = \frac{V_1}{I_1} = \frac{1}{n^2}\frac{V_2}{I_2} = \frac{R_1 + j\omega L_3}{n^2}$$

問１ (b) 別解

問１ (a) の結果に理想変成器の条件

$$\begin{aligned} k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1 \quad &\rightarrow \quad M^2 = L_1 L_2 \\ \frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{n^2} \quad &\rightarrow \quad L_2 = n L_1 \\ & L_1, L_2 \rightarrow \infty \end{aligned}$$

を適用すると

$$\begin{aligned} Z_i &= \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty} \left[j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_1 + j\omega(L_2 + L_3)} \right] = \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty} \left[j\omega L_1 + \frac{\omega^2 L_1 L_2}{R_1 + j\omega(L_2 + L_3)} \right] \\ &= \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty} \left[\frac{j\omega L_1 (R_1 + j\omega L_3)}{R_1 + j\omega(L_2 + L_3)} \right] = \lim_{L_1 \rightarrow \infty} \left[\frac{j\omega L_1 (R_1 + j\omega L_3)}{R_1 + j\omega(n^2 L_1 + L_3)} \right] = \frac{R_1 + j\omega L_3}{n^2} \end{aligned}$$

問題

図1の回路の入力インピーダンス Z_i を求めよ．また $R \to \infty$ としたときの共振角周波数を求めよ．

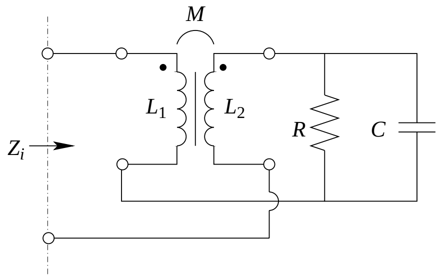


図1

解答

問題

図 1 に示す変成器を含む交流回路 (角周波数 ω) において，抵抗 R に流れる電流 I を求めよ．また 電流 I と 電圧 V が同相であるための条件を求めよ．

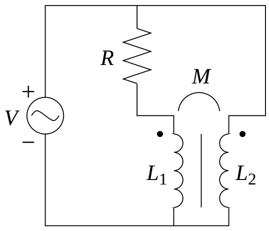


図 1

解答

問題

図 1 に示す変成器を含む回路について以下の問いに答よ．ただし，周波数を 50 Hz とする．

(a) $L_1 = \frac{4}{100\pi}$ H，$L_2 = \frac{9}{100\pi}$ H，$M = \frac{3}{100\pi}$ H，$C = \frac{1}{600\pi}$ F，$R = 3\ \Omega$ とするとき，端子 $1-1'$ から右側を見た入力インピーダンスを求めよ．

(b) (a) の変成器の結合係数 k はいくらか．

(c) 変成器が理想変成器であるとし，1 次側，2 次側の巻数比を $1 : \frac{3}{2}$ としたときの端子 $1-1'$ から右側を見た入力インピーダンスを求めよ．

(d) (c) のとき 1 次側と 2 次側の電流，電圧の比はいくらか．

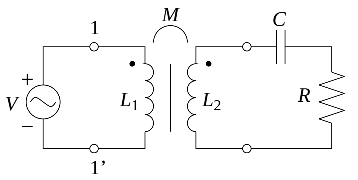


図 1

解答

(1) (a)

変成器の基本式より

$$
\begin{aligned}
V_1 &= j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 = j4I_1 + j3I_2 \\
V_2 &= j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 = j3I_1 + j9I_2 \\
V_2 &= -\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) I_2 = -\left(3 - j6\right) I_2
\end{aligned}
$$

第 2 式と第 3 式より V_2 を消去すると

$$
j3I_1 + j9I_2 = -(3-j6)I_2 \quad \rightarrow \quad j3I_1 = (-3+j3)I_2 \quad \rightarrow \quad I_2 = \frac{j3}{-3-j3}I_1 = \frac{1}{-1+j}I_1 = \frac{-1-j}{2}I_1
$$

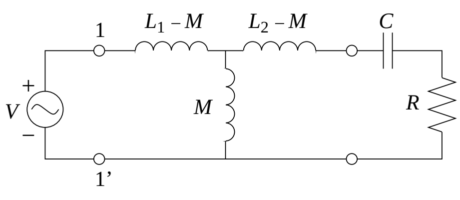
上式を第 1 式に代入すると

$$
V_1 = j4I_1 + j3\frac{-1-j}{2}I_1 = \frac{3+j5}{2}I_1
$$

よって，端子 $1-1'$ から右側を見た入力インピーダンスは

$$
Z_i = \frac{V_1}{I_1} = \frac{3+j5}{2}\ \Omega
$$

(別解) 変成器を T 形等価回路に置き換えると以下のように書ける



したがって

$$
\begin{aligned}
Z_i &= j\omega(L_1 - M) + \left\{ j\omega M // \left(j\omega(L_2 - M) + \frac{1}{j\omega C} + R \right) \right\} \\
&= j + \{j3 // (j6 - j6 + 3)\} = j + (j3//3) = j + \frac{j3 \cdot 3}{3 + j3} = j + \frac{j3}{1 + j} = j + \frac{j3(1 - j)}{2} \\
&= \frac{5 + j3}{2}\ \Omega
\end{aligned}
$$

(1) (b)

$$
\text{結合係数 } k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{1}{2}
$$

(1) (c)

2 次側の負荷のインピーダンスは

$$
Z_L = R + \frac{1}{j\omega C} = 3 - j6
$$

インピーダンス変換により 2 次側の素子を 1 次側に変換すると

$$
Z_i = \frac{Z_L}{n^2} = \frac{4}{9}(3 - j6) = \frac{4 - j8}{3}\ \Omega
$$

(1) (d)

$$
\frac{V_2}{V_1} = n = \frac{3}{2}, \qquad \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{n} = \frac{2}{3}
$$

問題

図 1 に示す変成器を含む回路について以下の設問に答よ．

(a) 1 次側，2 次側のインダクタンスを L_1，L_2，相互インダクタンスを M とするとき，抵抗 R_0 に流れる電流を求めよ．ただし，電源の周波数を $f = 50$ Hz，$V = 10$ V，$L_1 = \frac{1}{50\pi}$ H，$L_2 = \frac{1}{25\pi}$ H，$M = \frac{1}{50\pi}$ H $C_L = \frac{1}{400\pi}$，$R_0 = 1\ \Omega$，$R_L = 4\ \Omega$，$R_0 = 3\ \Omega$，$L_0 = \frac{1}{50\pi}$ H とする．

(b) 変成器が巻数比 $1 : n$ の理想変成器であるとしたとき，抵抗 R_L に流れる電流を求めよ．ただし，電源の角周波数を ω とする．

(c) (b) のときに抵抗 R_L で消費される電力を最大にするには，R_L，C_L の大きさをいくらにすれば良いか．ただし，電源の周波数を $f = 50$ Hz，$V = 10$ V，$R_0 = 3\ \Omega$，$L_0 = \frac{1}{25\pi}$，$n = 10$ とする．

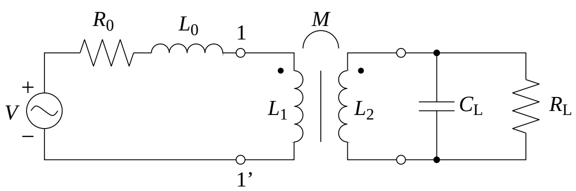


図 1

解答