H19 年度電気回路 II 期末試験解答 (簡易版)

1. (a) $t < 0$ の定常状態において，コンデンサに電流は流れず，回路に電流は流れていないので，

$$q(t) = C \cdot (-E_2) = 0.2 \cdot (-5) = -1 \text{ C}$$

であり，$t = 0$ で電荷は瞬時には変化しないので

$$q(0) = -1 \text{ C}$$

(b) 回路方程式は

$$(R_1 + R_2)i(t) + \frac{q(t)}{C} = E_1$$

であり，$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ の関係を用いると

$$(R_1 + R_2)\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E_1$$

数値を代入すると

$$15\frac{dq(t)}{dt} + 5q(t) = 10 \qquad \rightarrow \qquad 3\frac{dq(t)}{dt} + q(t) = 2$$

上式の定常解と過渡解はそれぞれ

$$\begin{aligned} q_s(t) &= 2 \\ q_t(t) &= Ae^{-\frac{t}{3}} \end{aligned}$$

であるので，一般解は

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = 2 + Ae^{-\frac{t}{3}}$$

初期条件として $q(0) = -1$ C を用いると

$$q(0) = 2 + A = -1 \qquad \rightarrow \qquad A = -3$$

したがって

$$q(t) = 2 - 3e^{-\frac{t}{3}} \text{ [C]}$$

また，電流は

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = e^{-\frac{t}{3}} \text{ [A]}$$

(c) 同じ問題をラプラス変換を用いて解く．回路方程式は

$$\begin{aligned} &(R_1 + R_2)i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = E_1 \\ &\rightarrow \qquad 15i(t) + 5\int i(t)dt = 10 \qquad \rightarrow \qquad 3i(t) + \int i(t)dt = 2 \end{aligned}$$

上式をラプラス変換すると，$\int i(t)dt\big|_{t=0} = q(0)$ を考慮して

$$3I(s) + \frac{1}{s}\left\{I(s) + q(0)\right\} = \frac{2}{s}$$

$q(0) = -1$ を代入して $I(s)$ について解くと

$$I(s) = \frac{3}{3s+1} = \frac{1}{s + \frac{1}{3}}$$

$I(s)$ をラプラス逆変換すると

$$i(t) = e^{-\frac{t}{3}} \text{ [A]}$$

(d) $t \geq 0$ で抵抗で消費されるエネルギーは，合成抵抗 $R_1 + R_2$ に電流 $i(t)$ が流れるとして

$$\int_0^\infty (R_1+R_2)i(t)^2 dt = \int_0^\infty 15e^{-\frac{2}{3}t}dt = \left[15 \cdot \left(-\frac{3}{2}e^{-\frac{2}{3}}\right)\right]_0^\infty = 0 - \left(-\frac{45}{2}\right) = \frac{45}{2}\ \mathrm{J}$$

2. (a) $t < 0$ での電源から右を見た合成インピーダンス Z_0 は，電源の角周波数 $\omega = 5$ [rad/s] を考慮して

$$Z_0 = R_1 + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L = 5 + j20 - j20 = 5\ \Omega$$

したがって，インピーダンス Z_0 は純抵抗であり，回路に流れる電流は電源電圧を抵抗で割れば良く

$$i(t) = \frac{v(t)}{5} = 2\cos 5t\ \mathrm{A}$$

であるので，$t = 0$ においては

$$i(0) = 2\ \mathrm{A}$$

(b) $t \geq 0$ における回路方程式は

$$L\frac{di(t)}{dt} + (R_1+R_2)i(t) = v(t) \qquad \rightarrow \qquad 4\frac{di(t)}{dt} + 20i(t) = 10\cos 5t$$

であり，定常解 $i_s(t)$ は $d/dt \rightarrow j\omega = j5$，電源のフェーザ表示を $10e^{j\frac{\pi}{2}}$ として，電流フェーザ I_s は

$$4 \cdot j5I_s + 20I_s = 10e^{j\frac{\pi}{2}} \qquad \rightarrow \qquad I_s = \frac{e^{j\frac{\pi}{2}}}{2(1+j)} = \frac{e^{j\frac{\pi}{2}}}{2\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

であるので，電流の時間変化 $i_s(t)$

$$i_s(t) = \mathrm{Im}\left\{I_s e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j5t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{j\left(5t+\frac{\pi}{4}\right)}\right\} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\left(5t + \frac{\pi}{4}\right)$$

一方，過渡解は

$$i_t(t) = Ae^{-5t}$$

であり，一般解は

$$i(t) = i_s(t) + i_t(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\left(5t+\frac{\pi}{4}\right) + Ae^{-5t}$$

初期条件は $t = 0$ で $i(0) = 2$ A であるので

$$i(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + A = 2 \qquad \rightarrow \qquad A = 2 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{7}{4}$$

よって

$$i(t) = \frac{1}{4}\left\{\sqrt{2}\cos\left(5t+\frac{\pi}{4}\right) + 7e^{-5t}\right\}\ \mathrm{[A]}$$

一方，ラプラス変換を用いて解くと，回路方程式をラプラス変換して

$$4 \cdot \{sI(s) - i(0)\} + 20I(s) = \frac{10s}{s^2+5^2}$$

$i(0) = 2$ A を代入して $I(s)$ について解くと

$$I(s) = \frac{10s}{4(s+5)(s^2+25)} + \frac{2}{4(s+5)} = \frac{1}{4}\left\{\frac{s+5}{s^2+25} - \frac{1}{s+5}\right\} + \frac{2}{4(s+5)}$$

上式をラプラス逆変換して

$$i(t) = \frac{1}{4}\left\{\cos 5t + \sin 5t - e^{-5t}\right\} + \frac{8}{4} = \frac{1}{4}\left\{\cos 5t + \sin 5t + 7e^{-5t}\right\}\ \mathrm{[A]}$$

3. (a) 初期電流，初期電荷が 0 であることを考慮して，閉路方程式をラプラス変換すると

$$\begin{bmatrix} (R_1+R_2)+s(L_1+L_2) & -(R_2+sL_2) \\ -(R_2+sL_2) & (R_2+R_3)+sL_2+\frac{1}{sC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

数値を代入して整理すると

$$\begin{bmatrix} 7(s+2) & -5(s+2) \\ -5(s+2) & \frac{5(s+2)^2}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cramer の公式を用いて $I_1(s)$，$I_2(s)$ を求めると

$$\begin{aligned} \Delta &= 7(s+2)\cdot\frac{5(s+2)^2}{s} - \{-5(s+2)\}^2 = \frac{5(s+2)^2}{s}\cdot\{7(s+2)-5s\} \\ &= \frac{5(s+2)^2}{s}\cdot(2s+14) = \frac{10(s+2)^2(s+7)}{s} \end{aligned}$$

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{14}{s} & -5(s+2) \\ 0 & \frac{5(s+2)^2}{s} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{14}{s}\cdot\frac{5(s+2)^2}{s}\cdot\frac{s}{10(s+2)^2(s+7)} = \frac{7}{s(s+7)}$$

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} 7(s+2) & \frac{14}{s} \\ -5(s+2) & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{14}{s}\cdot\{-5(s+2)\}\cdot\frac{s}{10(s+2)^2(s+7)} = \frac{7}{(s+2)(s+7)}$$

$I_1(s)$，$I_2(s)$ をラプラス逆変換すると

$$i_L(t) = i_1(t) = \left. sI_1(s)e^{st}\right|_{s=0} + \left.(s+7)I_1(s)e^{st}\right|_{s=-7} = 1 - e^{-7t}\ [\mathrm{A}]$$

$$i_C(t) = i_2(t) = \left.(s+2)I_2(s)e^{st}\right|_{s=-2} + \left.(s+7)I_2(s)e^{st}\right|_{s=-7} = \frac{7}{5}\left(e^{-2t} - e^{-7t}\right)\ [\mathrm{A}]$$

(b) $t \to \infty$ では，コンデンサには電流が流れていないので

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \frac{E}{R_1+R_2} = \frac{14}{4+10} = 1\ \mathrm{A} \\ q(t) &= C\cdot\frac{R_2E}{R_1+R_2} = 0.05\cdot\frac{10\cdot 14}{4+10} = 0.5\ \mathrm{C} \end{aligned}$$

(c) スイッチ S_2 を開いた後の回路方程式は，$i(t) = i_C(t) = i_L(t)$ として

$$L_1\frac{di(t)}{dt} + (R_1+R_3)i(t) + \frac{q(t)}{C} = E$$

$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ の関係を用，具体的な数値を代入すると

$$2\frac{d^2q(t)}{dt} + 14\frac{dq(t)}{dt} + 20q(t) = 14$$

上式の定常解は

$$q_s(t) = \frac{14}{20} = 0.7$$

であり，過渡解は，特性方程式

$$2m^2 + 14m + 20 = 0 \quad \rightarrow \quad 2(m+2)(m+5) = 0 \quad \rightarrow \quad m = -2,\ -5$$

より

$$q_t(t) = A_1e^{-2t} + A_2e^{-5t}$$

一般解は

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = 0.7 + A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-5t}$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -2A_1 e^{-2t} - 5A_2 e^{-5t}$$

初期条件より

$$\begin{cases} q(0) = 0.7 + A_1 + A_2 = 0.5 \\ i(0) = -2A_1 - 5A_2 = 1 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad A_1 = 0, \;\; A_2 = -0.2$$

よって

$$i(t) = i_C(t) = e^{-5t} \ [\mathrm{A}]$$

同じ問題をラプラス変換を用いて解くと，回路方程式のラプラス変換は

$$2\left\{sI(s) - i(0)\right\} + 14I(s) + \frac{20}{s}\left\{I(s) + q(0)\right\} = \frac{14}{s}$$

初期条件を代入して，$I(s)$ について解くと

$$I(s) = \frac{2s+4}{2s^2+14s+20} = \frac{2(s+2)}{2(s+2)(s+5)} = \frac{1}{s+5}$$

$I(s)$ をラプラス逆変換して

$$i(t) = e^{-5t} \ [\mathrm{A}]$$