H19 年度電気回路 II 宿題 (第 8 回)

課題

以下の回路において，時刻 $t = 0$ でスイッチ S が端子 a から端子 b に切り替わるものとする．以下の問に答よ．ただし，$R_1 = 2\ \Omega$，$R_2 = 6\ \Omega$，$R_3 = 10\ \Omega$，$R_4 = 12\ \Omega$，$L = 4$ H，$C = 0.5$ F，$E = 32$ V とする．

1. 図 1 の回路で，$t > 0$ でのコイルに流れる電流の時間変化を求めよ．
2. 図 2 の回路で，$t > 0$ でのコンデンサに流れる電流の時間変化を求めよ．
3. 図 2 の回路で，$t > 0$ で抵抗で消費されるエネルギーを求めよ．

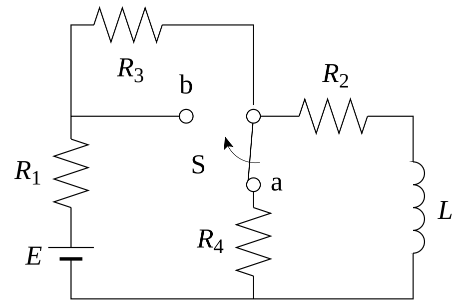


図 1

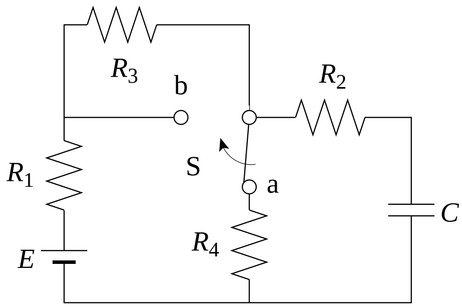
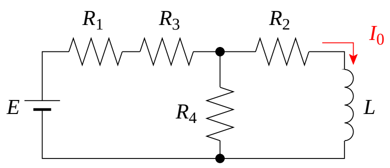


図 2

解答

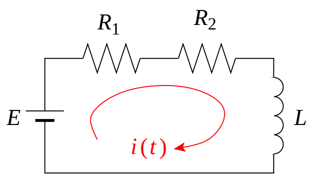
1. $t < 0$ での定常状態を考える．そのとき回路は下図のように書ける．



直流回路においてコイルでの電圧降下はない (抵抗が 0) であるので，$t < 0$ でコイルに流れる電流 I_0 は

$$I_0 = \frac{E}{R_1 + R_3 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}} \cdot \frac{1/R_2}{1/R_2 + 1/R_4} = \frac{32}{2 + 10 + 4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\ \mathrm{A}$$

$t > 0$ での回路は以下のように書くことができる．



ここで，抵抗 R_3 は短絡されるので除去できる (R_3 には電流が流れない)

上図に対してキルヒホッフの電圧則より回路方程式は以下のように与えられる．

$$L\frac{di(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i(t) = E$$

上式の定常解は $d/dt \to 0$ として

$$(R_1 + R_2)i_s(t) = E \qquad \to \qquad i_s(t) = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

過渡解は，$E \to 0$ として

$$L\frac{di_t(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i_t(t) = 0 \qquad \to \qquad \frac{di_t(t)}{dt} = -\frac{R_1 + R_2}{L}i_t(t)$$

より

$$i_t(t) = Ae^{-\frac{R_1+R_2}{L}t} \qquad (A \text{ は積分定数})$$

したがって，一般解は以下のように書ける

$$i(t) = i_s(t) + i_t(t) = \frac{E}{R_1 + R_2} + Ae^{-\frac{R_1+R_2}{L}t} = 4 + Ae^{-2t} \text{ A}$$

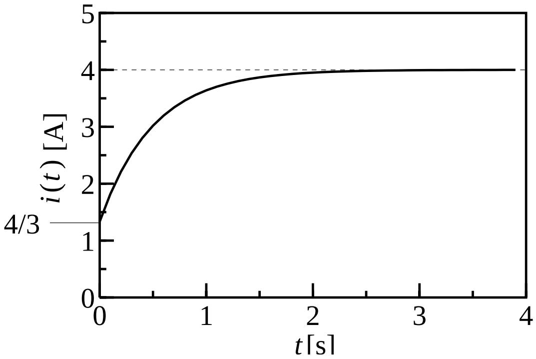
ここで，未知の積分定数 A を決定するため，$t = 0$ での初期条件を考える．コイルに流れる電流は瞬時には変化しないので $i(0) = I_0$ と考えられるので

$$i(0) = 4 + Ae^0 = 4 + A = \frac{4}{3} \qquad \to \qquad A = -\frac{8}{3}$$

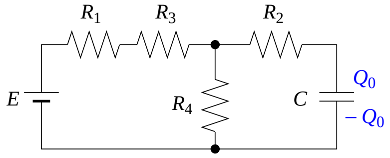
以上より

$$i(t) = 4 - \frac{8}{3}e^{-2t} \text{ A}$$

と求まる．これをグラフに表すと以下のようになる．



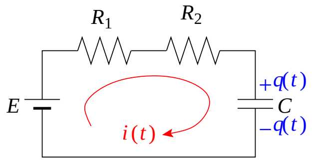
2. $t < 0$ での定常状態を考える．そのとき回路は下図のように書ける．



直流回路においてコンデンサに電流は流れないので，コンデンサにかかる電圧は抵抗 R_4 にかかる電圧に等しい．したがって

$$Q_0 = C\frac{R_4}{R_1 + R_3 + R_4}V = 0.5 \cdot \frac{12}{2 + 10 + 12} \cdot 32 = 8 \text{ C}$$

$t > 0$ での回路は以下のように書くことができる．



ここで，抵抗 R_3 は短絡されるので除去できる (R_3 には電流が流れない)

上図に対してキルヒホッフの電圧則より回路方程式は以下のように与えられる．

$$(R_1 + R_2)i(t) + \frac{q(t)}{C} = E$$

ここで，コンデンサに溜っている電荷 $q(t)$ は電流 $i(t)$ によって運ばれたものであり，$q(t)$ の時間変化が $i(t)$ に等しく，$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ と書けるので．

$$(R_1 + R_2)\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E$$

上式の定常解は $d/dt \to 0$ として

$$\frac{q_s(t)}{C} = E \qquad \to \qquad q_s(t) = CE$$

過渡解は，$E \to 0$ として

$$(R_1 + R_2)\frac{dq_t(t)}{dt} + \frac{q_t(t)}{C} = 0 \qquad \to \qquad \frac{dq_t(t)}{dt} = -\frac{1}{C(R_1 + R_2)}q_t(t)$$

より

$$q_t(t) = Ae^{-\frac{1}{C(R_1+R_2)}t} \qquad (A \text{ は積分定数})$$

したがって，一般解は以下のように書ける

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = CE + Ae^{-\frac{1}{C(R_1+R_2)}t} = 16 + Ae^{-\frac{t}{4}} \text{ C}$$

ここで，未知の積分定数 A を決定するため，$t = 0$ での初期条件を考える．コンデンサの電荷は瞬時には変化しないので $q(0) = Q_0$ と考えられるので

$$q(0) = 16 + Ae^0 = 16 + A = 8 \qquad \to \qquad A = -8$$

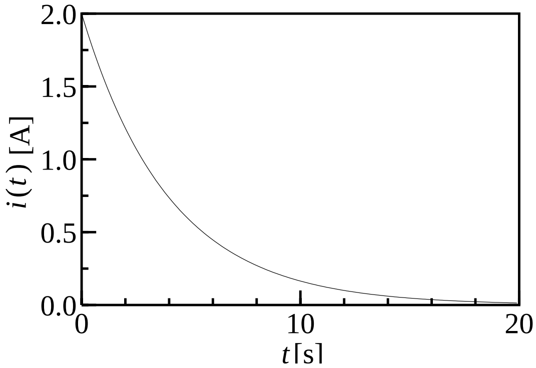
以上より

$$q(t) = 16 - 8e^{-\frac{t}{4}} \text{ C}$$

と求まり，電流 $i(t)$ は

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = 2e^{-\frac{t}{4}} \text{ A}$$

と求まる．これをグラフに表すと以下のようになる．



3. 抵抗で消費されるエネンルギーは，以下のように計算できる

$$W_R = \int_0^{\infty} (R_1 + R_2) i(t)^2 dt = \int_0^{\infty} 32 e^{-\frac{t}{2}} dt = \left[-64 e^{-\frac{t}{2}} \right]_0^{\infty} = 64 \text{ J}$$

これは，エネルギー保存則を考えると，$t = 0$ でコンデンサが持っていた電荷量に等しいはずで

$$W_C = \frac{Q_0^2}{2C} = 8^2 = 64 \text{ J}$$

であるので，確かにエネルギー保存則が満足されている．