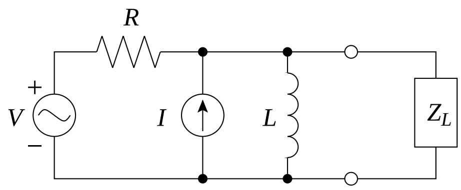
H19 年度電気回路 II 宿題 (第 7 回)

課題

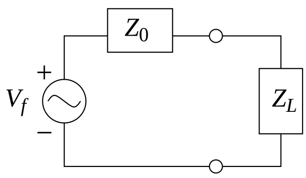
以下の回路を考え，負荷 Z_L で消費される実消費電力を最大にしたい．ただし，$f = 50$ Hz, $R = 3\ \Omega$，$L = \frac{1}{25\pi}$ H，$V = 10$ V，$I = 10$ A とする．以下の 2 通りの場合に対して，実消費電力を最大にする回路 (回路図と素子値) およびそのときの消費電力を求めよ．

1. 負荷 Z_L が抵抗 R_L である場合．実消費電力を R_L の関数として表現し，微分を用いて最適値を求める．
2. 負荷 Z_L が抵抗 R_L，コイル L_L，コンデンサ C_L の組合せとして表される場合．最大電力伝送定理を用いて負荷 Z_L の最適値を求め，実際の回路で表現する．

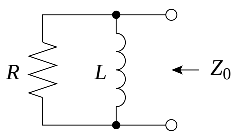


解答

まず，負荷より左側を下図のようにテブナン等価回路で置き換える．



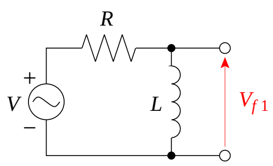
内部インピーダンス Z_0 は下図の回路を考え



$$
\begin{aligned}
Z_0 &= R//(j\omega L) = \frac{j\omega LR}{R + j\omega L} = \frac{j12}{3 + j4} = \frac{j12(3 - j4)}{25} \\
&= \frac{48 + j36}{25} = R_0 + jX_0
\end{aligned}
$$

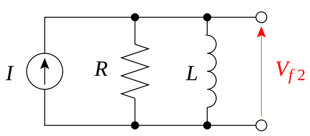
開放電圧 V_f は，重ね合わせの理より

- V のみのとき，下図の回路より



$$V_{f1} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} V$$

- I のみのとき，下図の回路より



$$V_{f2} = \frac{j\omega LRI}{R + j\omega L} V$$

したがって

$$V_f = V_{f1} + V_{f2} = \frac{j\omega L(V + RI)}{R + j\omega L} = \frac{j160}{3 + j4}$$

この結果をもとに設問に答える．

1. $Z_L = R_L$ のとき，負荷に流れる電流，かかる電圧，実消費電力は

$$I_L = \frac{V_f}{(R_0 + R_L) + jX_0}$$
$$V_L = \frac{(R_L V_f}{(R_0 + R_L) + jX_0}$$
$$P = \mathrm{Re}\{V_L^* I_L\} = \frac{R_L |V_f|^2}{(R_0 + R_L)^2 + X_0^2}$$

新たに $f(R_L) = 1/P$ という関数を定義し，これを R_L で微分すると

$$f(R_L) = \frac{1}{|V_f|^2}\left(R_L + 2R_0 + \frac{R_0^2 + X_0^2}{R_L}\right)$$
$$\frac{\partial f(R_L)}{\partial R_L} = \frac{1}{|V_f|^2}\left(1 - \frac{R_0^2 + X_0^2}{R_L^2}\right)$$

微分が 0 となるのは

$$R_L = \sqrt{R_0^2 + X_0^2} = |Z_0| = \frac{12}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{12}{5}\ \Omega$$

のときであり，このとき $f(R_L)$ は最小，したがって，P は最大となる．P の最大値 $P_{\max}$ は

$$\begin{aligned} P_{\max} &= \frac{\frac{12}{5} \cdot \frac{160^2}{3^2+4^2}}{\left(\frac{48}{25} + \frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{36}{25}\right)^2} = \frac{\frac{12 \cdot 160^2}{5 \cdot 25}}{\frac{108^2 + 36^2}{25^2}} = \frac{60 \cdot 160^2}{2^4 \cdot 3^6 + 2^4 \cdot 3^4} = \frac{60 \cdot 2^8 \cdot 10^2}{2^4 \cdot 3^4(9+1)} \\ &= \frac{3200}{27}\ \mathrm{W} \simeq 118.5\ \mathrm{W} \end{aligned}$$

2. 最大電力伝送定理より，Z_L の最適値は

$$Z_{L,opt} = Z_0^* = R_0 - jX_0 = \frac{48 - j36}{25}$$

これは R_L と C_L の直列接続で実現でき

$$Z_L = R_L + \frac{1}{j\omega C_L} = \frac{48}{25} + \frac{36}{j25}$$

となるように，R_L と C_L の値を決めると

$$R_{L,opt} = \frac{48}{25}\ \Omega$$
$$C_{L,opt} = \frac{1}{144\pi}\ \mathrm{F}$$

このときの実消費電力 $P_{\max}$ は

$$P_{\max} = \frac{|V_f|^2}{4R_0} = \frac{160^2}{3^2 + 4^2} \cdot \frac{25}{4 \cdot 48} = \frac{400}{3}\ \mathrm{W} = 133.3\ \mathrm{W}$$