H19 年度電気回路 II 宿題 (第 6 回)

課題

下図の回路のテブナン等価回路，ノルトン等価回路をそれぞれ求めよ．また，テブナン等価回路をノルトン等価回路に変換したものが，ノルトン等価回路を直接求めたものと同じであることを確かめよ．ただし，$f = 50$ Hz，$R_1 = R_2 = R_3 = 1\ \Omega$，$L_1 = \frac{1}{50\pi}$ H，$C_1 = \frac{1}{50\pi}$ F，$V_1 = V_2 = V_3 = 10$ V，$I_1 = I_2 = I_3 = 5$ A とする．

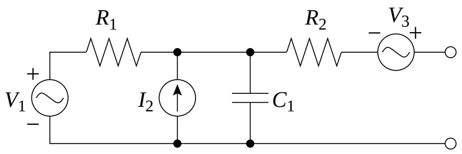


図 1

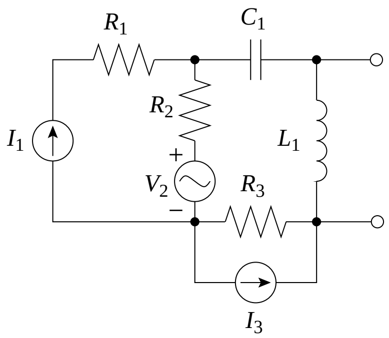
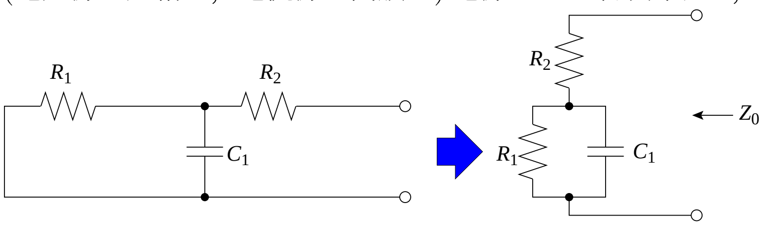


図 2

解答

1. (a) テブナン等価回路を求める

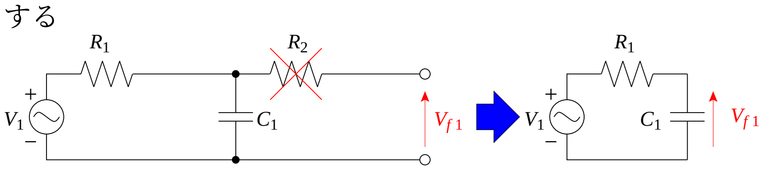
- 内部インピーダンスの計算
(電圧源を短絡し，電流源を開放し) 電源を全て取り外すと，以下の回路を得る．



この回路の端子間のインピーダンスは以下のように求まる．

$$
\begin{aligned}
Z_0 &= R_2 + \left(R_1 // \frac{1}{j\omega C_1}\right) = R_2 + \frac{\frac{R_1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = R_2 + \frac{R_1}{1 + j\omega C_1 R_1} \\
&= \frac{(R_1 + R_2) + j\omega C_1 R_1 R_2}{1 + j\omega C_1 R_1} = \frac{2 + j2}{1 + j2} = \frac{(2 + j2)(1 - j2)}{1^2 + 2^2} = \frac{6 - j2}{5}\ \Omega
\end{aligned}
$$

- 電圧源 V_1 のみを残したときの開放電圧 V_{f1}
回路は以下のように簡単化できる．ここで，端子間が開放されているときには R_2 には電流が流れないので電圧降下も生じないので，考慮しなくて良いことに注意する

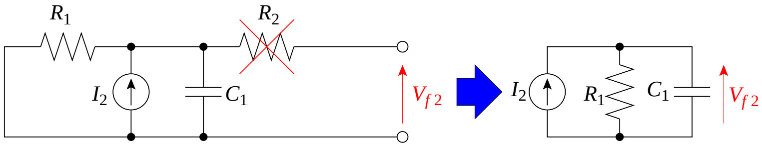


V_{f1} は以下のように求まる

$$
V_{f1} = \frac{\frac{1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} V_1 = \frac{V_1}{1 + j\omega C_1 R_1} = \frac{10}{1 + j2} = 2(1 - j2)\ \text{V}
$$

- 電流源 I_2 のみを残したときの開放電圧 V_{f2}

  回路は以下のように簡単化できる．

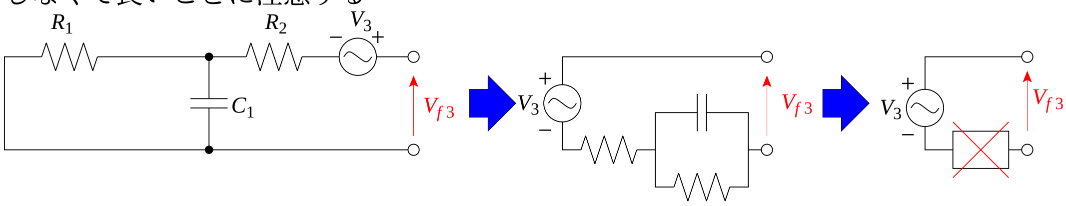


  V_{f2} は以下のように求まる

$$V_{f2} = \frac{\frac{R_1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} I_2 = \frac{R_1 I_2}{1 + j\omega C_1 R_1} = \frac{5}{1 + j2} = 1 - j2 \text{ V}$$

- 電圧源 V_3 のみを残したときの開放電圧 V_{f3}

  回路は以下のように簡単化できる．ここで，端子間が開放されているときには回路には電流が流れないので抵抗コンデンサによる電圧降下が生じないので，考慮しなくて良いことに注意する



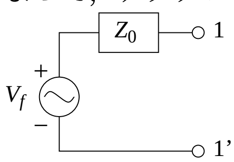
  V_{f3} は以下のように求まる

$$V_{f3} = V = 10 \text{ V}$$

  以上より，端子間の開放電圧は

$$V_f = V_{f1} + V_{f2} + V_{f3} = \frac{V_1 + R_1 I_2}{1 + j\omega C_1 R_1} + V_3 = 13 - j6 \text{ V}$$

よって，テブナン等価回路は以下のように求まる



$$Z_0 = \frac{6 - j2}{5} \ \Omega$$
$$V_f = 13 - j6 \text{ V}$$

(b) ノルトン等価回路を求める

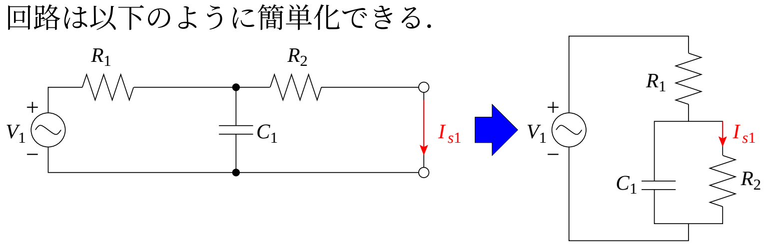
- 内部アドミタンスの計算

  テブナン等価回路の内部インピーダンスを求めた回路を考えれば良いので，内部アドミタンスはインピーダンスの逆数として以下のように求まる．

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} = \frac{1 + j\omega C_1 R_1}{(R_1 + R_2) + j\omega C_1 R_1 R_2} = \frac{1 + j2}{2 + j2} = \frac{(1 + j2)(1 - j)}{4} = \frac{3 + j}{4} \text{ S}$$

- 電圧源 V_1 のみを残したときの短絡電流 I_{s1}

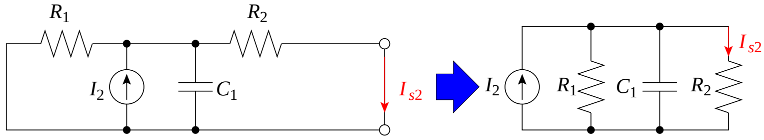
  回路は以下のように簡単化できる．



$$I_{s1} = \frac{V_1}{R_1 + \left(R_2 // \frac{1}{j\omega C_1}\right)} \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C_1}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{V_1}{R_1 + \frac{\frac{R_2}{j\omega C_1}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_1}}} \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C_1}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_1}}$$

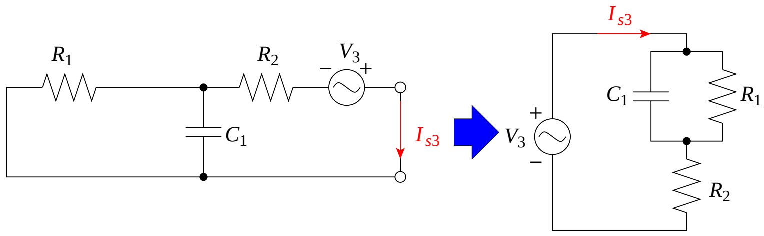
$$= \frac{V_1}{R_1 + R_2 + j\omega C_1 R_1 R_2} = \frac{10}{2+j2} = \frac{5}{2}(1-j)\ \mathrm{A}$$

- 電流源 I_2 のみを残したときの短絡電流 I_{s2}
  回路は以下のように簡単化できる．



$$I_{s2} = \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + j\omega C_1} I_2 = \frac{R_1 I_2}{R_1 + R_2 + j\omega C_1 R_1 R_2} = \frac{5}{2+j2} = \frac{5}{4}(1-j)\ \mathrm{A}$$

- 電圧源 V_3 のみを残したときの短絡電流 I_{s3}
  回路は以下のように簡単化できる．



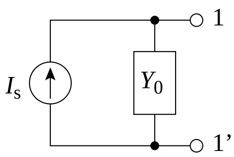
$$I_{s3} = \frac{V_3}{R_2 + \left(R_1 // \frac{1}{j\omega C}\right)} = \frac{V_3}{R_2 + \frac{\frac{R_1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}}} = \frac{(1 + j\omega C_1 R_1) V_3}{R_1 + R_2 + j\omega C_1 R_1 R_2}$$

$$= \frac{(1+j2)\cdot 10}{2+j2} = \frac{5(3+j)}{2}\ \mathrm{V}$$

以上より，端子間の短絡電流は

$$I_s = I_{s1} + I_{s2} + I_{s3} = \frac{V_1 + R_1 I_2 + (1 + j\omega C_2 R_1) V_3}{R_1 + R_2 + j\omega C_1 R_1 R_2} = \frac{5(9-j)}{4}\ \mathrm{A}$$

よって，ノルトン等価回路は以下のように求まる



$$Y_0 = \frac{3+j}{4}\ \mathrm{S}$$

$$I_s = \frac{5(9-j)}{4}\ \mathrm{A}$$

(c) テブナン等価回路のパラメータからノルトン等価回路のパラメータを求める

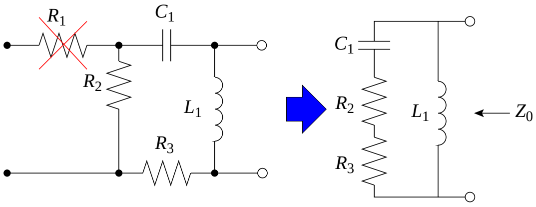
$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} = \frac{5}{6-j2} = \frac{5(6+j2)}{40} = \frac{3+j}{4}\ \mathrm{S}$$

$$I_s = \frac{V_f}{Z_0} = Y_0 V_f = \frac{3+j}{4}\cdot(13-j6) = \frac{45-j5}{4} = \frac{5(9-j)}{4}\ \mathrm{A}$$

これは直接ノルトン等価回路を求めた結果と確かに一致している．

2. (a) テブナン等価回路を求める

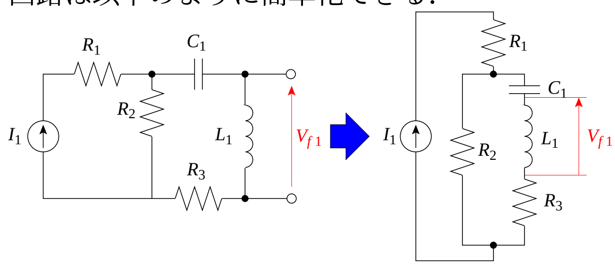
- 内部インピーダンスの計算
  (電圧源を短絡し，電流源を開放し) 電源を全て取り外すと，以下の回路を得る．



この回路の端子間のインピーダンスは以下のように求まる．

$$
\begin{aligned}
Z_0 &= j\omega L_1 // \left(R_2 + R_3 + \frac{1}{j\omega C_1}\right) = \frac{j\omega L_1\left(R_2 + R_3 + \frac{1}{j\omega C_1}\right)}{j\omega L_1 + R_2 + R_3 + \frac{1}{j\omega C_1}} \\
&= \frac{-\omega^2 C_1 L_1 (R_1 + R_2) + j\omega L_1}{(1 - \omega^2 C_1 L_1) + j\omega C_1 (R_2 + R_3)} = \frac{-8 + j2}{-3 + j4} = \frac{8 - j2}{3 - j4} \\
&= \frac{(8 - j2)(3 + j4)}{25} = \frac{32 + j26}{25}\ \Omega
\end{aligned}
$$

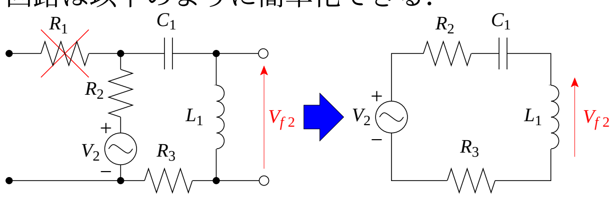
- 電流源 I_1 のみを残したときの開放電圧 V_{f1}
  回路は以下のように簡単化できる．



V_{f1} は以下のように求まる (分流の法則で L_1 に流れる電流を求め，$j\omega L_1$ に乗じる)

$$
\begin{aligned}
V_{f1} &= j\omega L_1 \cdot \frac{R_2}{R_2 + \left(R_3 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\right)} I_1 = \frac{-\omega^2 C_1 L_1 R_2 I_1}{(1 - \omega^2 C_1 L_1) + j\omega C_1 (R_2 + R_3)} \\
&= \frac{-20}{-3 + j4} = \frac{20}{3 - j4} = \frac{4(3 + j4)}{5}\ \mathrm{V}
\end{aligned}
$$

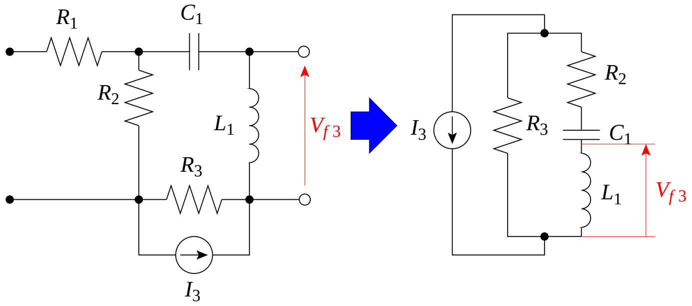
- 電圧源 V_2 のみを残したときの開放電圧 V_{f2}
  回路は以下のように簡単化できる．



V_{f2} は以下のように求まる

$$
\begin{aligned}
V_{f2} &= \frac{j\omega L_1}{R_2 + R_3 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} V_2 = \frac{-\omega^2 C_1 L_1 V_2}{(1 - \omega^2 C_1 L_1) + j\omega C_1 (R_1 + R_2)} \\
&= \frac{-20}{-3 + j4} = \frac{4(3 + j4)}{5}\ \mathrm{V}
\end{aligned}
$$

- 電流源 I_3 のみを残したときの開放電圧 V_{f3}
  回路は以下のように簡単化できる．



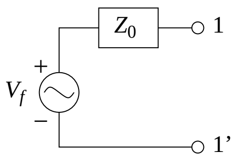
V_{f3} は以下のように求まる

$$
\begin{aligned}
V_{f3} &= j\omega L_1 \cdot \frac{R_2}{R_3 + \left(R_2 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\right)}(-I_3) = \frac{\omega^2 C_1 L_1 R_3 I_3}{(1-\omega^2 C_1 L_1) + j\omega C_1 (R_2+R_3)} \\
&= \frac{20}{-3+j4} = \frac{-20}{3-j4} = \frac{-4(3+j4)}{25}\ \mathrm{V}
\end{aligned}
$$

以上より，端子間の開放電圧は

$$
V_f = V_{f1} + V_{f2} + V_{f3} = \frac{-\omega^2 C_1 L_1 \left\{(R_2 I_1 - R_3 I_3) + V_2\right\}}{(1-\omega^2 C_1 L_1) + j\omega C_1 (R_2+R_3)} \frac{40}{3-j4} = \frac{8}{5}(3+j4)\ \mathrm{V}
$$

よって，テブナン等価回路は以下のように求まる



$$
Z_0 = \frac{32+j26}{25}\ \Omega
$$

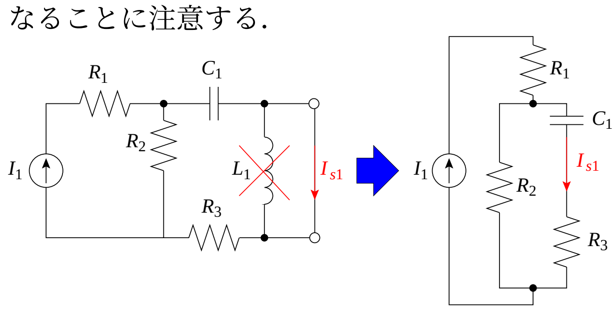
$$
V_f = \frac{8(3+j4)}{5}\ \mathrm{V}
$$

(b) ノルトン等価回路を求める

- 内部アドミタンスの計算
  テブナン等価回路の内部インピーダンスを求めた回路を考えれば良いので，内部アドミタンスはインピーダンスの逆数として以下のように求まる．

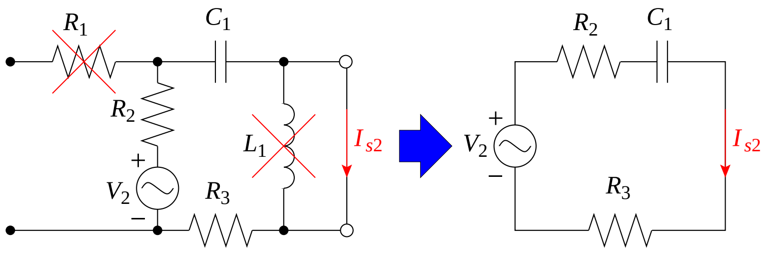
$$
Y_0 = \frac{1}{Z_0} = \frac{(1-\omega^2 C_1 L_1) + j\omega C_1 (R_2+R_3)}{-\omega^2 C_1 L_1 (R_1+R_2) + j\omega L_1} = \frac{1+j2}{2+j2} = \frac{(1+j2)(1-j)}{4} = \frac{3+j}{4}\ \mathrm{S}
$$

- 電流源 I_1 のみを残したときの短絡電流 I_{s1}
  回路は以下のように簡単化できる．ここで，端子間を短絡すると端子間の電位差は 0 になり，それと並列に接続される素子の電位差が 0，したがって電流も 0 になることに注意する．



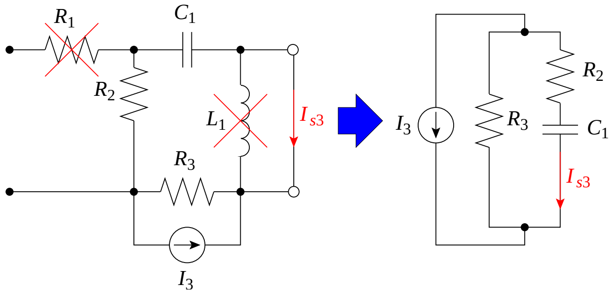
$$
\begin{aligned}
I_{s1} &= \frac{R_2}{R_2 + \left(R_3 + \frac{1}{j\omega C_1}\right)} I_1 = \frac{j\omega C_1 R_2 I_1}{1 + j\omega C_1 (R_2+R_3)} \\
&= = \frac{j10}{1+j4} = \frac{10(4+j)}{17}\ \mathrm{A}
\end{aligned}
$$

- 電圧源 V_2 のみを残したときの短絡電流 I_{s2}
  回路は以下のように簡単化できる．



$$
I_{s2} = \frac{V_2}{R_2 + R_3 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{j\omega C_1 V_2}{1 + j\omega C_1 (R_2 + R_3)} = \frac{j20}{1 + j4} = \frac{20(4 + j)}{17} \text{ A}
$$

- 電流源 I_3 のみを残したときの短絡電流 I_{s3}
回路は以下のように簡単化できる．

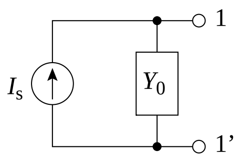


$$
\begin{aligned}
I_{s3} &= \frac{R_3}{R_3 + \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_1}\right)}(-I_3) = \frac{-j\omega C_1 R_3 I_3}{1 + j\omega C_1 (R_2 + R_3)} \\
&= \frac{-j10}{1 + j4} = \frac{-10(4 + j)}{17} \text{ V}
\end{aligned}
$$

以上より，端子間の短絡電流は

$$
I_s = I_{s1} + I_{s2} + I_{s3} = \frac{j\omega C_1 (R_2 I_1 - R_3 I_3 + V_2)}{1 + j\omega C_1 (R_2 + R_3)} = \frac{j20}{1 + j4} = \frac{20(4 + j)}{17} \text{ A}
$$

よって，ノルトン等価回路は以下のように求まる



$$
Y_0 = \frac{16 - j13}{34} \text{ S}
$$

$$
I_s = \frac{20(4 + j)}{17} \text{ A}
$$

(c) テブナン等価回路のパラメータからノルトン等価回路のパラメータを求める

$$
\begin{aligned}
Y_0 &= \frac{1}{Z_0} = \frac{3 - j4}{8 - j2} = \frac{16 - j13}{34} \text{ S} \\
I_s &= \frac{V_f}{Z_0} = Y_0 V_f = \frac{16 - j13}{34} \cdot \frac{8(3 + j4)}{5} = \frac{4(16 - j13)(3 + j4)}{17 \cdot 5} = \frac{4(100 + j25)}{17 \cdot 5} \\
&= \frac{20(4 + j)}{17} \text{ A}
\end{aligned}
$$

これは直接ノルトン等価回路を求めた結果と確かに一致している．