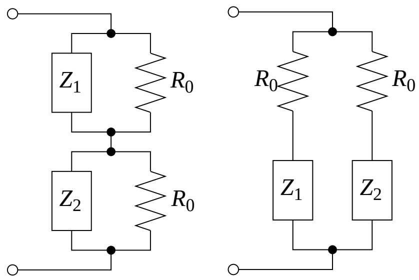
H19 年度電気回路 II 宿題 (第 5 回)

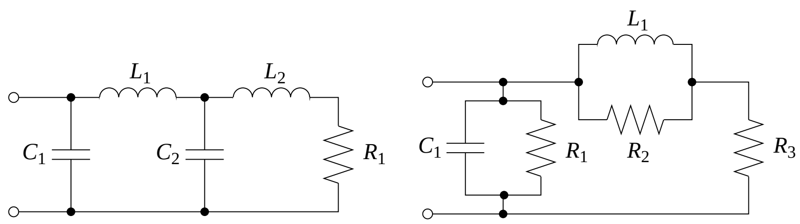
課題

1. 以下の回路で，Z_1 と Z_2 が R_0 に関して逆回路の関係にあるとき，回路が定抵抗回路であることを確認せよ．



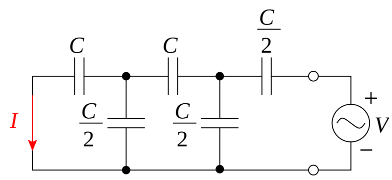
(a) (b)

2. 以下の回路の逆回路を次の 2 通りの方法でそれぞれ求めよ．(1) 直列 $\Longleftrightarrow$ 並列の変換を行う方法．(1) 図的解法．また，$R_0 = 1\ \Omega$，$R_1 = R_2 = R_3 = 2\ \Omega$，$L_1 = L_2 = \frac{1}{100\pi}$ H，$C_1 = C_2 = \frac{1}{200\pi}$ F，$f = 50$ Hz とするとき，元の回路と逆回路のインピーダンスの積が R_0^2 になることを確認せよ．



(a) (b)

3. 以下の回路の電流 I を求めよ．(相反定理を利用すると計算が楽)



課題

1. Z_1 と Z_2 が R_0 に関して逆回路の関係にあるので

$$Z_1 \cdot Z_2 = R_0^2$$

と書くことができ，これを変形して以下のように表すものとする．

$$\frac{Z_1}{R_0} = \frac{R_0}{Z_2} = \alpha$$

(a) 端子間のインピーダンスを Z とすると

$$
\begin{aligned}
Z &= (R_0//Z_1)+(R_0//Z_2)=\frac{R_0Z_1}{R_0+Z_1}+\frac{R_0Z_2}{R_0+Z_2}=\frac{Z_1}{1+\frac{Z_1}{R_0}}+\frac{R_0}{\frac{R_0}{Z_2}+1}\\
&= \frac{Z_1}{1+\alpha}+\frac{R_0}{\alpha+1}=\frac{R_0+Z_1}{1+\alpha}=\frac{R_0\left(1+\frac{Z_1}{R_0}\right)}{1+\alpha}=\frac{R_0(1+\alpha)}{1+\alpha}=R_0
\end{aligned}
$$

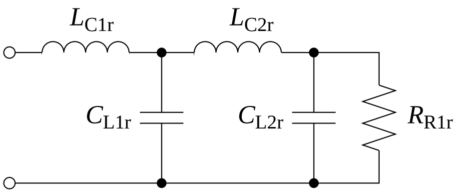
したがって，周波数によらずインピーダンスが一定値 R_0 であることがわかる．

(b) 端子間のインピーダンスを Z とすると

$$
\begin{aligned}
Z &= (R_0+Z_1)//(R_0+Z_2)=\frac{(R_0+Z_1)(R_0+Z_2)}{R_0+Z_1+R_0+Z_2}=\frac{R_0\left(1+\frac{Z_1}{R_0}\right)\left(1+\frac{Z_2}{R_0}\right)}{\frac{Z_1}{R_0}+2+\frac{Z_2}{R_0}}\\
&= \frac{R_0(1+\alpha)\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha+2+\frac{1}{\alpha}}=\frac{R_0(1+\alpha)^2/\alpha}{(1+\alpha)^2/\alpha}=R_0
\end{aligned}
$$

したがって，周波数によらずインピーダンスが一定値 R_0 であることがわかる．

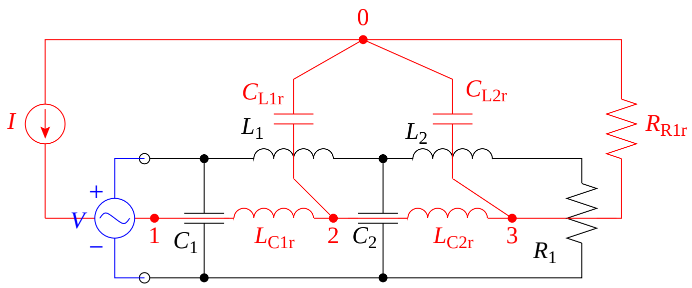
2. (a) まず，直列 $\Longleftrightarrow$ 並列の変換により逆回路を求めると以下のようになる．

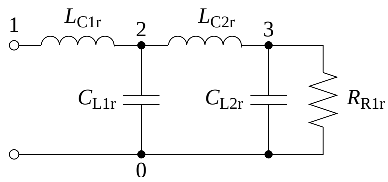


ここに，図中の素子値はそれぞれ以下の通りである

$$
L_{C1r}=C_1R_0^2,\quad L_{C2r}=C_2R_0^2,\quad C_{L1r}=\frac{L_1}{R_0^2},\quad C_{L2r}=\frac{L_2}{R_0^2},\quad R_{R1r}=\frac{R_0^2}{R_1}
$$

次に，図式的な方法で逆回路を求めてみる．端子間に仮に電圧源を置き，各閉路内に節点を置き，各素子を通るように線を結ぶと下図左のようになり，これを整理し，電流源を取り去ると下図右のように上で求めた回路と同じになる．





与えられた素子値に対して，元の回路のインピーダンスと，逆回路のインピーダンスを計算してみる．まず，元の回路に対しては，$j\omega L_1=j\omega L_2=j\ \Omega$，$1/j\omega C_1=1/j\omega C_2=-j2\ \Omega$ であるので，右から順にインピーダンスを合成していくと

$$
\begin{aligned}
&Z_1=R_1+j\omega L_2=2+j\\
&Z_2=Z_1//\frac{1}{j\omega C_2}=\frac{(2+j)\cdot(-j2)}{2+j-j2}=\frac{2-j4}{2-j}
\end{aligned}
$$

$$Z_3 = j\omega L_1 + Z_2 = j + \frac{2-j4}{2-j} = \frac{2j+1+2-j4}{2-j} = \frac{3-j2}{2-j}$$

$$Z_i = Z_3 // \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{\frac{3-j2}{2-j}\cdot(-j2)}{\frac{3-j2}{2-j}-j2} = \frac{-j2(3-j2)}{3-j2-j2(2-j)} = \frac{-4-j6}{1-j6}$$

逆回路のインピーダンスは，まず，それぞれの素子の値が

$$L_{C1r} = C_1 R_0^2 = \frac{1}{200\pi}\ \mathrm{H}$$

$$L_{C2r} = C_2 R_0^2 = \frac{1}{200\pi}\ \mathrm{H}$$

$$C_{L1r} = \frac{L_1}{R_0^2} = \frac{1}{100\pi}\ \mathrm{F}$$

$$C_{L2r} = \frac{L_2}{R_0^2} = \frac{1}{100\pi}\ \mathrm{F}$$

$$R_{R1r} = \frac{R_0^2}{R_1} = 0.5\ \Omega$$

であるので

$$j\omega L_{C1r} = j\omega L_{C2r} = j0.5\ \Omega$$

$$\frac{1}{j\omega C_{L1r}} = \frac{1}{j\omega C_{L2r}} = -j\ \Omega$$

となり，右側から順番にインピーダンスを合成していくと

$$Z_{1r} = R_{R1r} // \frac{1}{j\omega C_{L1r}} = \frac{0.5\cdot(-j)}{0.5-j} = \frac{-j}{1-j2}$$

$$Z_{2r} = j\omega L_{C2r} + Z_{1r} = j0.5 + \frac{-j}{1-j2} = \frac{j0.5+1-j}{1-j2} = \frac{2-j}{2-j4}$$

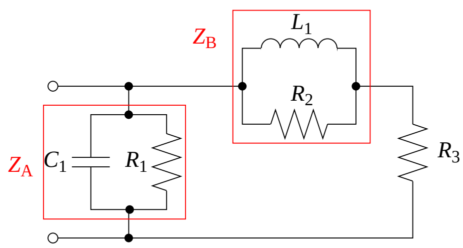
$$Z_{3r} = Z_{2r} // \frac{1}{j\omega C_{L2r}} = \frac{\frac{2-j}{2-j4}\cdot(-j)}{\frac{2-j}{2-j4}-j} = \frac{-j(2-j)}{2-j-j(2-j)} = \frac{-1-j2}{-2-j3} = \frac{1+j2}{2+j3}$$

$$Z_{Zir} = j\omega L_{C1r} + Z_{3r} = j0.5 + \frac{1+j2}{2+j3} = \frac{j(2+j3)+2(1+j2)}{2(2+j3)} = \frac{-1+j6}{4+j6} = \frac{1-j6}{-4-j6}$$

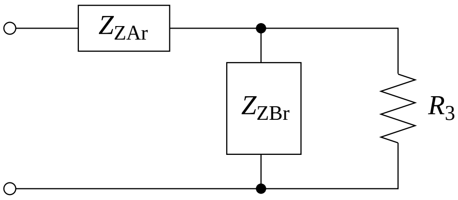
以上より

$$Z_i \cdot Z_{Zir} = \frac{-4-j6}{1-j6}\cdot\frac{1-j6}{-4-j6} = 1 = R_0^2$$

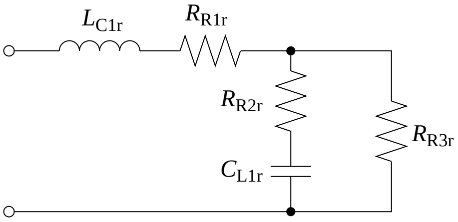
(b) まず，直列 $\Longleftrightarrow$ 並列の変換により逆回路を求める．まず，下図のように，回路をまとめる．



この逆回路は以下のように書ける．



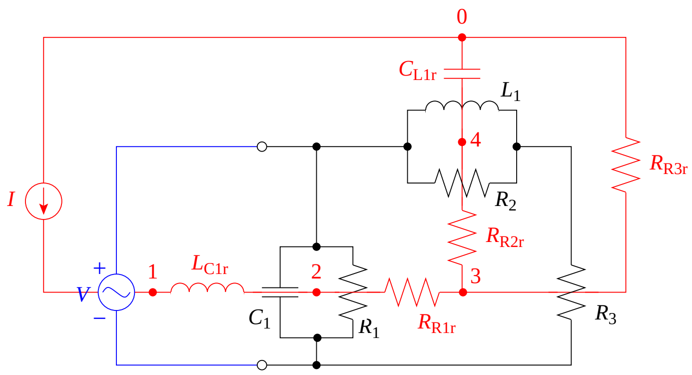
ここに，Z_{ZAr}，Z_{ZBr} はそれぞれ Z_A，Z_B の逆回路であるので，その具体的な形で書き換えると，以下のように逆回路が求まる．

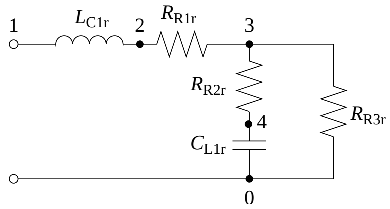


ここに，図中の素子値はそれぞれ以下の通りである

$$L_{C1r} = C_1 R_0^2, \quad C_{L1r} = \frac{L_1}{R_0^2}, \quad R_{R1r} = \frac{R_0^2}{R_1}, \quad R_{R2r} = \frac{R_0^2}{R_2}, \quad R_{R3r} = \frac{R_0^2}{R_3},$$

次に，図式的な方法で逆回路を求めてみる．端子間に仮に電圧源を置き，各閉路内に節点を置き，各素子を通るように線を結ぶと下図左のようになり，これを整理し，電流源を取り去ると下図右のようになり，上で求めた回路と同じになる．





与えられた素子値に対して，元の回路のインピーダンスと，逆回路のインピーダンスを計算してみる．まず，元の回路に対しては，$j\omega L_1 = j\omega L_2 = j\ \Omega$，$1/j\omega C_1 = 1/j\omega C_2 = -j2\ \Omega$ であるので，右から順にインピーダンスを合成していくと

$$Z_B = R_2//(j\omega L_1) = \frac{j2}{2+j}$$

$$Z_A = R_1//\frac{1}{j\omega C_1} = \frac{2\cdot(-j2)}{2-j2} = \frac{-j4}{2-j2}$$

$$Z_1 = R_3 + Z_B = 2 + \frac{j2}{2+j} = \frac{4+j2+j2}{2+j} = \frac{4+j4}{2+j}$$

$$Z_i = Z_A//Z_1 = \frac{\frac{-j4}{2-j2}\cdot\frac{4+j4}{2+j}}{\frac{-j4}{2-j2}+\frac{4+j4}{2+j}} = \frac{-j4(4+j4)}{-j4(2+j)+(2-j2)(4+j4)}$$

$$= \frac{16-j16}{20-j8} = \frac{4-j4}{5-j2}\ \Omega$$

逆回路のインピーダンスは，まず，それぞれの素子の値が

$$
\begin{aligned}
L_{C1r} &= C_1 R_0^2 = \frac{1}{200\pi}\ \mathrm{H} \\
C_{L1r} &= \frac{L_1}{R_0^2} = \frac{1}{100\pi}\ \mathrm{F} \\
R_{R1r} &= \frac{R_0^2}{R_1} = 0.5\ \Omega \\
R_{R2r} &= \frac{R_0^2}{R_2} = 0.5\ \Omega \\
R_{R3r} &= \frac{R_0^2}{R_3} = 0.5\ \Omega
\end{aligned}
$$

であるので

$$
\begin{aligned}
&j\omega L_{C1r} = j0.5\ \Omega \\
&\frac{1}{j\omega C_{L1r}} = -j\ \Omega
\end{aligned}
$$

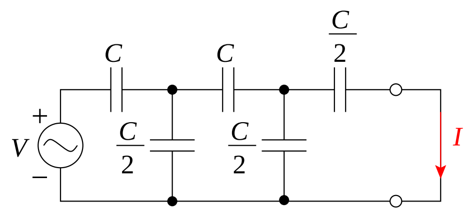
となり，右側から順番にインピーダンスを合成していくと

$$
\begin{aligned}
Z_{ZBr} &= R_{R_2r} + \frac{1}{j\omega C_{L1r}} = 0.5 - j \\
Z_{ZAr} &= R_{R_1r} + j\omega L_{C1r} = 0.5 + j0.5 = \frac{1+j}{2} \\
Z_1 &= Z_{ZBr} // R_{R3r} = \frac{0.5 \cdot (0.5 - j)}{0.5 + 0.5 - j} = \frac{1 - j2}{4 - j4} \\
Z_{Zir} &= Z_{ZAr} + Z_1 = \frac{1+j}{2} + \frac{1-j2}{4-j4} = \frac{(1+j)(2-j2) + 1 - j2}{4 - j4} = \frac{5 - j2}{4 - j4}
\end{aligned}
$$

以上より

$$
Z_i \cdot Z_{Zir} = \frac{4 - j4}{5 - j2} \cdot \frac{5 - j2}{4 - j4} = 1 = R_0^2
$$

3. 相反定理によると，問題図の回路を解く代わりに，下図の回路の電流 I を求めれば良い．



図より，電源から右を見た合成容量を計算すると，$C/2$ となる．したがって，電源から出る電流は

$$
I' = \frac{V}{\frac{1}{j\omega C/2}} = \frac{j\omega CV}{2}
$$

であり，最初の分岐，次の分岐でそれぞれ電流が半分ずつに分かれるので

$$
I = \frac{I'}{4} = \frac{j\omega CV}{8}
$$