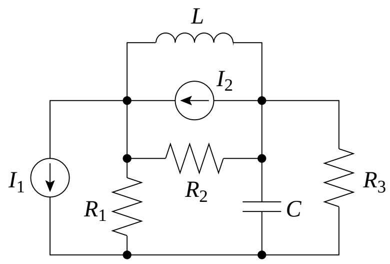
H19 年度電気回路 II 宿題 (第 4 回)

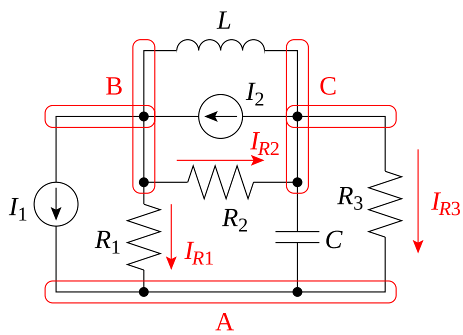
課題

以下の回路に対して，節点を設定し，節点方程式を行列の形で表現し，基準節点の電位を 0 V としたときの，各節点電位を求めよ．ただし，基準節点の選び方には任意性があるので，可能な全ての場合に対して節点方程式をたてて節点電位を求めよ．(例えば，節点が 4 個なら 4 通りの場合について解答すること) また，各抵抗に流れる電流を求め，基準節点の選び方によらず，答が一致することを確かめよ．ここで，$R_1 = \frac{1}{3}$ Ω，$R_2 = \frac{1}{2}$ Ω，$R_3 = \frac{1}{7}$ Ω，$L = \frac{1}{200\pi}$ H，$C = \frac{1}{25\pi}$ F，$I_1 = 14$ A，$I_2 = 7$ A，周波数 $f = 50$ Hz とする．



解答

問題の図では，下図のように 3 つの節点があるので，それぞれ節点 A, B, C を基準節点とした場合に対して，各節点電位を求める．また，各抵抗を流れる向きは図の向きを正にとるものとする．



1. 節点 A,B,C をそれぞれ節点 0, 1, 2 と置く場合 (A を基準節点と考える場合)
   節点方程式は以下のように書ける

$$\begin{bmatrix} -I_1 + I_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L} & -\frac{1}{R_2} - \frac{1}{j\omega L} \\ -\frac{1}{R_2} - \frac{1}{j\omega L} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

   与えられた数値を代入すると

$$\begin{bmatrix} -7 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - j2 & -2 + j2 \\ -2 + j2 & 9 + j2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

   Cramer の公式を使って上式を解く．行列式の値は

$$\begin{aligned} \Delta &= (5 - j2)(9 + j2) - (-2 + j2)^2 = (45 - j18 + j10 + 4) - (4 - j4 - j4 - 4) = 49 \\ &= 7^2 \end{aligned}$$

と求まるので，各節点電位は以下のように求まる．

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} -7 & -2+j2 \\ -7 & 9+j2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-7(9+j2)+7(-2+j2)}{7^2} = \frac{-(9+j2)+(-2+j2)}{7} = -\frac{11}{7}\ \mathrm{V}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5-j2 & -7 \\ -2+j2 & -7 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-7(5-j2)+7(-2+j2)}{7^2} = \frac{-(5-j2)+(-2+j2)}{7} = \frac{-7+j4}{7}\ \mathrm{V}$$

各抵抗に流れる電流は以下のように求まる．

$$I_{R1} = \frac{V_\mathrm{B}-V_\mathrm{A}}{R_1} = \frac{V_1-0}{R_1} = -\frac{11}{7}\cdot 3 = -\frac{33}{7}\ \mathrm{A}$$

$$I_{R2} = \frac{V_\mathrm{B}-V_\mathrm{C}}{R_2} = \frac{V_1-V_2}{R_2} = \frac{-11-(-7+j4)}{7}\cdot 2 = \frac{-8-j8}{7}\ \mathrm{A}$$

$$I_{R3} = \frac{V_\mathrm{C}-V_\mathrm{A}}{R_3} = \frac{V_2-0}{R_3} = \frac{-7+j4}{7}\cdot 7 = -7+j4\ \mathrm{A}$$

2. 節点 A,B,C をそれぞれ節点 1, 2, 0 と置く場合
(C を基準節点と考える場合)
節点方程式は以下のように書ける

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ -I_1+I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+j\omega C & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{j\omega L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

与えられた数値を代入すると

$$\begin{bmatrix} 14 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+j4 & -3 \\ -3 & 5-j2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Cramer の公式を使って上式を解く．行列式の値は

$$\begin{aligned} \Delta &= (10+j4)(5-j2)-(-3)^2 = (50-j20+j20+8)-9 = 49 \\ &= 7^2 \end{aligned}$$

と求まるので，各節点電位は以下のように求まる．

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 14 & -3 \\ -7 & 5-j2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{14(5-j2)-21}{7^2} = \frac{(10-j4)-3}{7} = \frac{7-j4}{7}\ \mathrm{V}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10+j4 & 14 \\ -3 & -7 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-7(10+j4)+42}{7^2} = \frac{-(10+j4)+6}{7} = \frac{-4-j4}{7}\ \mathrm{V}$$

各抵抗に流れる電流は以下のように求まる．

$$I_{R1} = \frac{V_{\rm B} - V_{\rm A}}{R_1} = \frac{V_2 - V_1}{R_1} = \frac{(-4 - j4) - (7 - j4)}{7} \cdot 3 = -\frac{33}{7} \text{ A}$$

$$I_{R2} = \frac{V_{\rm B} - V_{\rm C}}{R_2} = \frac{V_2 - 0}{R_2} = \frac{-4 - j4}{7} \cdot 2 = \frac{-8 - j8}{7} \text{ A}$$

$$I_{R3} = \frac{V_{\rm C} - V_{\rm A}}{R_3} = \frac{0 - V_1}{R_3} = \frac{-(7 - j4)}{7} \cdot 7 = -7 + j4 \text{ A}$$

3. 節点 A,B,C をそれぞれ節点 2, 0, 1 と置く場合
(B を基準節点と考える場合)
節点方程式は以下のように書ける

$$\begin{bmatrix} -I_2 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C & -\frac{1}{R_3} - j\omega C \\ -\frac{1}{R_3} - j\omega C & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + j\omega C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

与えられた数値を代入すると

$$\begin{bmatrix} -7 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 + j2 & -7 - j4 \\ -7 - j4 & 10 + j4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Cramer の公式を使って上式を解く．行列式の値は

$$\begin{aligned} \Delta &= (9 + j2)(10 + j4) - (7 - j4)^2 = (90 + j36 + j20 - 8) - (49 - j56 - 16) = 49 \\ &= 7^2 \end{aligned}$$

と求まるので，各節点電位は以下のように求まる．

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} -7 & -7 - j4 \\ 14 & 10 + j4 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-7(10 + j4) - 14(-7 - j4)}{7^2} = \frac{(-10 - j4) + (14 + j8)}{7} = \frac{4 + j4}{7} \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 9 + j2 & -7 \\ -7 - j4 & 14 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{14(9 + j2) + 7(-7 - j4)}{7^2} = \frac{(18 + j4) + (-7 - j4)}{7} = \frac{11}{7} \text{ V}$$

各抵抗に流れる電流は以下のように求まる．

$$I_{R1} = \frac{V_{\rm B} - V_{\rm A}}{R_1} = \frac{0 - V_2}{R_1} = \frac{-11}{7} \cdot 3 = -\frac{33}{7} \text{ A}$$

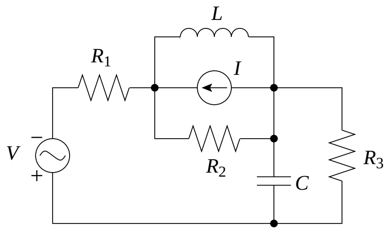
$$I_{R2} = \frac{V_{\rm B} - V_{\rm C}}{R_2} = \frac{0 - V_1}{R_2} = \frac{-4 - j4}{7} \cdot 2 = \frac{-8 - j8}{7} \text{ A}$$

$$I_{R3} = \frac{V_{\rm C} - V_{\rm A}}{R_3} = \frac{V_1 - V_2}{R_3} = \frac{(4 + j4) - 11}{7} \cdot 7 = -7 + j4 \text{ A}$$

以上より，基準節点を A, B, C のどれに選んでも，各抵抗に流れる電流として同じ値が求まることがわかる．

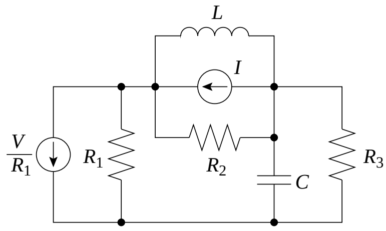
参考問題

以下の回路に対して，各抵抗に流れる電流を求めよ．ここで，$R_1 = \frac{1}{3}\ \Omega$，$R_2 = \frac{1}{2}\ \Omega$，$R_3 = \frac{1}{7}\ \Omega$，$L = \frac{1}{200\pi}$ H，$C = \frac{1}{25\pi}$ F，$V = 14/3$ V，$I = 7$ A，周波数 $f = 50$ Hz とする．



解答 1　節点方程式により解く

図の左側の電圧源と抵抗をノルトン等価回路を用いて電流源に置き換えると，以下のように，$V/R_1 = I_1$，$I = I_2$ とすると前問の問題図と同じ回路になる (見た目の違いにだまされない)．

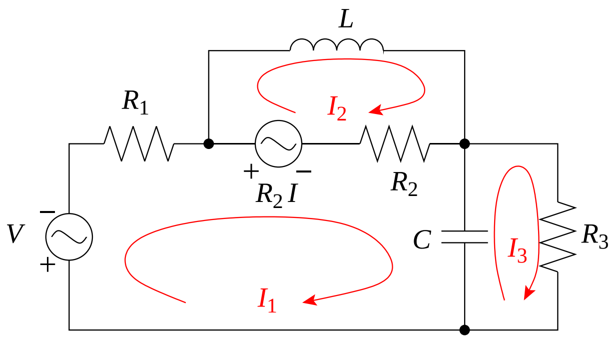


いま，$V/R_1 = 14$ A であり，他のパラメータも全て前問と同じなので，前問と同じように節点電位を求めることができ，抵抗 R_2，R_3 に流れる電流も同様に求まる．ただし，抵抗 R_1 に流れる電流に関しては，計算をし直す必要があり，例えば，前問の節点 A を基準節点とする場合を考えると．以下のように求まる．

$$I_{R1} = \frac{-V - V_1}{R_1} = \frac{-14/3 - (-11/7)}{1/3} = -14 + \frac{33}{7} = -\frac{65}{7}\ \text{A}$$

解答 2　閉路程式により解く

問題の回路は電流源をテブナンの等価回路を使って電圧源に置き換えた後，閉路方程式を解くことによっても求めることができる．この場合の回路は下図のようになる．



上図の回路に対して，閉路方程式を立てて閉路電流を求める．

$$\begin{bmatrix} -V - R_2 I \\ R_2 I \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C} & -R_2 & -\frac{1}{j\omega C} \\ -R_2 & R_2 + j\omega L & 0 \\ -\frac{1}{j\omega C} & 0 & R_3 + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

与えられた数値を代入すると

$$\begin{bmatrix} -\frac{14}{3}-\frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6}-j\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & j\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+j\frac{1}{2} & 0 \\ j\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{7}-j\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

式を見やすくするため，1,2,3 行目をそれぞれ 12, 2, 28 倍する．

$$\begin{bmatrix} -98 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10-j3 & -6 & j3 \\ -1 & 1+j & 0 \\ j7 & 0 & 4-j7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

行列式の値は

$$\begin{aligned} \Delta &= (10-j3)(1+j)(4-j7)-(j3)(j7)(1+j)-(-1)(-6)(4-j7) \\ &= (13+j7)(4-j7)+21(1+j)-6(4-j7)=7(1+j)(4-j7)+21(1+j) \\ &= 7(1+j)(7-j7)=7^2\cdot 2 \end{aligned}$$

Cramer の公式より

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\begin{vmatrix} -98 & -6 & j3 \\ 7 & 1+j & 0 \\ 0 & 0 & 4-j7 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-98(1+j)(4-j7)-7(-6)(4-j7)}{7^2\cdot 2} \\ &= \frac{-7(1+j)(4-j7)+3(4-j7)}{7} = \frac{-(4+j7)(4-j7)}{7} = \frac{-(4^2+7^2)}{7} = -\frac{65}{7}\ \mathrm{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 10-j3 & -98 & j3 \\ -1 & 7 & 0 \\ j7 & 0 & 4-j7 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{7(10-j3)(4-j7)-j3\cdot 7\cdot j7-(-98)(-1)(4-j7)}{7^2\cdot 2} \\ &= \frac{(-4-j3)(4-j7)+21}{7\cdot 2} = \frac{-16+j28-j12-21+21}{14} = \frac{-16+j16}{14} = \frac{-8+j8}{7}\ \mathrm{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{\begin{vmatrix} 10-j3 & -6 & -98 \\ -1 & 1+j & 7 \\ j7 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{j7(-6)\cdot 7+98(1+j)\cdot j7}{7^2\cdot 2} \\ &= \frac{-j6+j14(1+j)}{2} = -j3+j7(1+j) = -7+j4\ \mathrm{A} \end{aligned}$$

ここで，抵抗に流れる電流はそれぞれ

$$\begin{aligned} I_{R1} &= I_1 = -\frac{65}{7}\ \mathrm{A} \\ I_{R2} &= (I_1-I_2)+I = -\frac{65}{7}-\frac{-8+j8}{7}+7 = \frac{-8-j8}{7} \\ I_{R3} &= I_3 = -7+j4\ \mathrm{A} \end{aligned}$$

よって，節点方程式で解いても，閉路方程式で解いても，答が一致することが確認される．