H19 年度電気回路 II 宿題 (第 3 回)

課題

以下の回路に対して，閉路方程式を行列の形で表し，次に，$R = 1\ \Omega$，$L = \frac{4}{100\pi}$ H，$C = \frac{1}{200\pi}$ F，$V_1 = 10$ V，$V_2 = 5$ V の場合に対して，閉路電流 I_1，I_2 を求めよ．

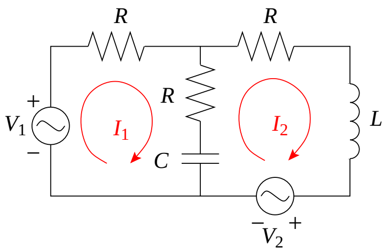

図 1

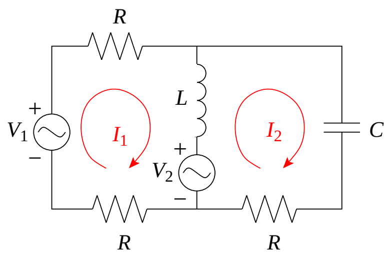

図 2

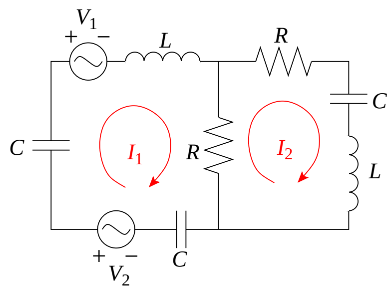

図 3

解答

1. 閉路方程式は行列の形で以下のように書ける

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2R + \frac{1}{j\omega C} & -\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) \\ -\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) & 2R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

与えられた数値を代入すると

$$\begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1-j) & -(1-j2) \\ -(1-j2) & 2(1+j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

行列の行列式 Δ を求めると以下のようになる．

$$\Delta = 4(1-j)(1+j) - (1-j2)^2 = 8 - (-3-j4) = 11 + j4$$

閉路電流 I_1，I_2 はそれぞれ以下のように求まる．

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 10 & -(1-j2) \\ -5 & 2(1+j) \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{20(1+j) - 5(1-j2)}{11+j4} = \frac{5(3+j6)}{11+j4} \\ &= \frac{5(3+j6)(11-j4)}{11^2+4^2} = \frac{5(57+j54)}{137}\ \mathrm{A} = \frac{285+j270}{137}\ \mathrm{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 2(1-j) & 10 \\ -(1-j2) & -5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2(1-j)(-5) + 10(1-j2)}{11+j4} = \frac{-j10}{11+j4} \\ &= \frac{-j10(11-j4)}{11^2+4^2} = \frac{-10(4+j11)}{137}\ \mathrm{A} = \frac{-40-j110}{137}\ \mathrm{A} \end{aligned}$$

実際に求まった値を代入してみると，右辺の 1 行目の式に対して

$$
\begin{aligned}
&2(1-j)I_1-(1-j2)I_2=\frac{2(1-j)\cdot 5(57+j54)}{137}+\frac{(1-j2)\cdot 10(4+j11)}{137}\\
&=\frac{10(111-j3+26+j3)}{137}=10\ \mathrm{V}
\end{aligned}
$$

右辺の 2 行目の式に対して

$$
\begin{aligned}
&-(1-j2)I_1+2(1+j)I_2=\frac{-(1-j2)\cdot 5(57+j54)}{137}+\frac{2(1+j)\cdot(-10)(4+j11)}{137}\\
&\frac{-5(165-j60)-20(-7+j15)}{137}=\frac{-5(165-j60-28+j60)}{137}=-5\ \mathrm{V}
\end{aligned}
$$

以上より，I_1，I_2 が連立一次方程式の解であることが確認される．

2. 閉路方程式は行列の形で以下のように書ける

$$
\begin{bmatrix} V_1-V_2 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2R+j\omega L & -j\omega L \\ -j\omega L & R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}
$$

与えられた数値を代入すると

$$
\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2(1+j2) & -j4 \\ -j4 & 1+j2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}
$$

行列の行列式 Δ を求めると以下のようになる．

$$
\Delta=2(1+j2)^2-(-j4)^2=-6+j8+16=10+j8=2(5+j4)
$$

閉路電流 I_1，I_2 はそれぞれ以下のように求まる．

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 5 & -j4 \\ 5 & 1+j2 \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{5(1+j2)+j20}{2(5+j4)}=\frac{5(1+j6)}{2(5+j4)}\\
&= \frac{5(1+j6)(5-j4)}{2(5^2+4^2)}=\frac{5(29+j26)}{82}\ \mathrm{A}=\frac{145+j130}{82}\ \mathrm{A}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 2(1+j2) & 5 \\ -j4 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{10(1+j2)+j20}{2(5+j4)}=\frac{10(1+j4)}{2(5+j4)}\\
&= \frac{10(1+j4)(5-j4)}{2(5^2+4^2)}=\frac{5(21+j16)}{41}\ \mathrm{A}=\frac{105+j80}{41}\ \mathrm{A}
\end{aligned}
$$

実際に求まった値を代入してみると，右辺の 1 行目の式に対して

$$
\begin{aligned}
&2(1+j2)I_1-j4I_2=\frac{2(1+j2)\cdot 5(29+j26)}{82}+\frac{-j4\cdot 10(21+j16)}{82}\\
&=\frac{10(-23+j84-j84+64)}{82}=5\ \mathrm{V}
\end{aligned}
$$

右辺の 2 行目の式に対して

$$-j4I_1 + (1+j2)I_2 = \frac{-j4 \cdot 5(29+j26)}{82} + \frac{(1+j2)\cdot 10(21+j16)}{82}$$
$$\frac{20(26-j29)+10(-11+j58)}{82} = \frac{10(52-j58-11+j58)}{82} = 5 \text{ V}$$

以上より，I_1，I_2 が連立一次方程式の解であることが確認される．

3. 閉路方程式は行列の形で以下のように書ける

$$\begin{bmatrix} -V_1+V_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R+j\omega L+\frac{2}{j\omega C} & -R \\ -R & 2R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

与えられた数値を代入すると

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2(1+j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

行列の行列式 Δ を求めると以下のようになる．

$$\Delta = 2(1+j) - (-1)^2 = 1+j2$$

閉路電流 I_1，I_2 はそれぞれ以下のように求まる．

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 2(1+j) \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-10(1+j)}{1+j2} \\ &= \frac{-10(1+j)(1-j2)}{(1^2+2^2)} = \frac{-10(3-j)}{5} = -2(3-j) \text{ A} = -6+j2 \text{ A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-5}{1+j2} \\ &= \frac{-5(1-j2)}{1^2+2^2} = -1+j2 \text{ A} \end{aligned}$$

実際に求まった値を代入してみると，右辺の 1 行目の式に対して

$$I_1 - I_2 = (-6+j2) - (-1+j2) = -5 \text{ V}$$

右辺の 2 行目の式に対して

$$-I_1 + 2(1+j)I_2 = -(-6+j2) + 2(1+j)(-1+j2) = 6 - j2 + 2(-3+j) = 0 \text{ V}$$

以上より，I_1，I_2 が連立一次方程式の解であることが確認される．