H19 年度電気回路 II 宿題 (第 14 回)

課題

問 2 は次回の講義で説明するので解答の必要はありません (演習対策です).

1. 図の回路に，以下の 3 種類の電源電圧が与えられたときの電流 $i(t)$ の時間変化を求めよ．また，$t \to \infty$ までに抵抗で消費されるエネルギーを求めよ．ただし，$R = 1\ \Omega$，$C = 0.5$ F とし，t の単位は秒である．

   (a) $v(t) = 10u(t)$ [V]

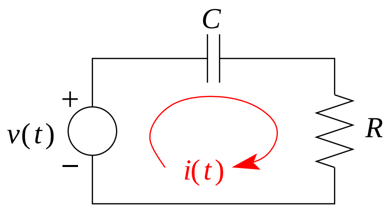
   (b) $v(t) = \begin{cases} 2.5t\ [\mathrm{V}] & (0 \le t < 4\ \mathrm{s}) \\ 10\ \mathrm{V} & (t > 4\ \mathrm{s}) \end{cases}$

   (c) $v(t) = 10\left(1 - e^{-4t}\right)u(t)$ [V]

2. 図の回路のインパルス応答 $h(t)$ を求め，

$$i(t) = \int_0^t h(\tau)\, v(t-\tau)\, d\tau$$

   により，回路に流れる電流 $i(t)$ の時間変化を求め問 1 と一致することを確かめよ．



解答

1. まず，電源電圧 $v(t)$ のラプラス変換が $V(s)$ であるものとして，電流 $i(t)$ のラプラス変換を求める．コンデンサに蓄えられている電荷が $q(t) = \int i(t)dt$ と表されることを利用すると，回路の方程式は

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = v(t)$$

   であるので，これをラプラス変換すると

$$RI(s) + \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{s}\left\{I(s) + \int i(t)dt\bigg|_{t=0}\right\} = V(s) \quad \to \quad RI(s) + \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{s}\left\{I(s) + q(0)\right\} = V(s)$$

   これを $I(s)$ について解くと

$$I(s) = \frac{sCV(s) - q(0)}{sCR + 1} = \frac{sV(s) - 2q(0)}{s + 2} \tag{1}$$

   $t = 0$ での電荷は $q(0) = 0$ であり，各電圧のラプラス変換がわかれば，$I(s)$ がわかり，これをラプラス逆変換することで $i(t)$ が求まる．

(a) 電源電圧のラプラス変換は，$u(t)$ のラプラス変換はラプラス変換表より $1/s$ であるので

$$V(s) = \mathscr{L}\{v(t)\} = \frac{10}{s}$$

$q(0) = 0$ および，上の $V(s)$ を式 (1) に代入し，具体的な数値を代入すると

$$I(s) = \frac{5}{0.5s + 1} = \frac{10}{s+2}$$

このラプラス逆変換は，ラプラス変換表より

$$i(t) = \mathscr{L}^{-1}\{I(s)\} = 10e^{-2t} \text{ [A]}$$

と求まる．また，抵抗で消費されるエネルギーは

$$W_R = \int_0^\infty Ri(t)^2 dt = \int_0^\infty 100e^{-4t} dt = \left[-25e^{-4t}\right]_0^\infty = 25 \text{ J}$$

(b) 電源のラプラス変換は，ラプラス変換の定義より

$$V(s) = \int_0^\infty v(t)e^{-st}dt = \int_0^4 2.5te^{-st}dt + \int_4^\infty 10e^{-st}dt$$

$v(t)$ は t の範囲により関数式が異なるので，積分範囲を 0〜4 s と 4 s 以降で分けている．上式を部分積分を用いて積分すると

$$\begin{aligned} V(s) &= \left[2.5t \cdot \frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^4 - \int_0^4 2.5 \cdot \frac{e^{-st}}{-s} dt + \left[10 \cdot \frac{e^{-st}}{-s}\right]_4^\infty \\ &= -\frac{10e^{-4s}}{s} - \left[2.5 \cdot \frac{e^{-st}}{(-s)^2}\right]_0^4 + \frac{10e^{-4s}}{s} = -\frac{2.5}{s^2}\left\{e^{-4s} - 1\right\} = \frac{2.5}{s^2}\left(1 - e^{-4s}\right) \end{aligned}$$

上の結果と $q(0) = 0$ を式 (1) に代入すると

$$I(s) = \frac{2.5}{s(s+2)}\left(1 - e^{-4s}\right)$$

上式をラプラス変換するために

$$F(s) = \frac{2.5}{s(s+2)}$$

と置いて，このラプラス逆変換を求めると

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = sF(s)e^{st}\Big|_{s=0} + (s+2)F(s)e^{st}\Big|_{s=-2} = \frac{2.5}{s+2}e^{st}\Big|_{s=0} + \frac{2.5}{2}e^{st}\Big|_{s=-2} \\ &= \frac{5}{4}\left(1 - e^{-2t}\right)u(t) \end{aligned}$$

ここで，$f(t)$ は $t \geq 0$ においてのみ値を持つ関数ということを明示するため，ステップ関数 $u(t)$ を付けている．この結果と推移定理を用いると，求めたい電流 $i(t)$ は

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\left(1 - e^{-4s}\right)\right\} = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-4s}\right\} = f(t) - f(t-4) \\ &= \frac{5}{4}\left(1 - e^{-2t}\right)u(t) - \frac{5}{4}\left(1 - e^{-2(t-4)}\right)u(t-4) \text{ [A]} \end{aligned}$$

あるいは，$t = 0$〜4 s では，$u(t) = 1$，$u(t-4) = 0$，$t > 4$ s では，$u(t) = 1$，$u(t-4) = 1$ であることを利用して，時間ごとに分けて書き表すと

$$i(t) = \begin{cases} \frac{5}{4}\left(1 - e^{-2t}\right) \text{ [A]} & (0 \leq t < 4 \text{ s}) \\ \frac{5}{4}\left(e^8 - 1\right)e^{-2t} \text{ [A]} & (t > 4 \text{ s}) \end{cases}$$

抵抗で消費されるエネルギーは，$t=0\sim4$ s と $t>4$ s に分けて積分し，足し合わせることで以下のように求まる

$$\begin{aligned}
W_R &= \int_0^\infty Ri(t)^2dt = \int_0^4 \frac{25}{16}\left(1-e^{-2t}\right)^2 dt + \int_4^\infty \frac{25}{16}\left(e^8-1\right)^2 e^{-4t}dt \\
&= \int_0^4 \frac{25}{16}\left(1-2e^{-2t}+e^{-4t}\right)dt + \frac{25}{16}\left(e^8-1\right)^2\left[\frac{e^{-4t}}{-4}\right]_4^\infty \\
&= \frac{25}{16}\left[t+e^{-2t}+\frac{e^{-4t}}{-4}\right]_0^4 + \frac{25}{16}\left(e^{16}-2e^8 8+1\right)\cdot\frac{e^{-16}}{4} \\
&= \frac{25}{16}\left\{\left(4+e^{-8}-\frac{e^{-16}}{4}\right)-\left(0+1-\frac{1}{4}\right)\right\} + \frac{25}{16}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}e^{-8}+\frac{1}{4}e^{-16}\right) \\
&= \frac{25}{16}\left(\frac{14}{4}+\frac{1}{2}e^{-8}\right) = \frac{25}{32}\left(7+e^{-8}\right) \simeq 5.47 \text{ J}
\end{aligned}$$

(a)，(b) ともに最終的にコンデンサに蓄えられている電荷の大きさは同じであるが，(b) の結果は (a) の場合よりも抵抗で消費されるエネルギーが小さいことがわかる．これは，ステップ状に電圧を加えるより，ゆるやかに電圧を上げたほうが回路に流れる電流が小さくなり，結果として抵抗で消費されるエネルギーが小さくて済むことを表している．

(別解)

この問題は，$t=0\sim4$ s と $t>4$ s で，過渡現象が 2 回起こるものとして考えることもできる．このとき，$t=0\sim4$ s に対しては $v(t)=2.5t$ V であるので

$$V(s)=\frac{2.5}{s^2}$$

であり，$q(0)=0$ と，この結果を式 (1) に代入して

$$I(s)=\frac{2.5}{s(s+2)}$$

と求まる．これは前に求めた $F(s)$ と同じであり，ラプラス逆変換より

$$i(t)=f(t)=\frac{5}{4}\left(1-e^{-2t}\right)\ \text{[A]}$$

と求まる．次に $t>4$ s での過渡現象を考えるため，$t=4$ s でコンデンサに蓄えられている電荷を求めると

$$\begin{aligned}
q(4) &= q(0)+\int_0^4 i(t)dt = 0+\int_0^4 \frac{5}{4}\left(1-e^{-2t}\right)dt = \frac{5}{4}\left[t+\frac{e^{-2t}}{2}\right]_0^4 \\
&= \frac{5}{4}\left(4+\frac{e^{-8}}{2}-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}\left(7+e^{-8}\right)
\end{aligned}$$

いま，新たに $t'=t-4$ として，$t'=0$ で過渡現象が起こるものとして考え，式 (1) を用いると，

$$v(t')=10u(t') \quad\rightarrow\quad \mathcal{L}\{v(t')\}=\frac{10}{s'}$$

であり，$q(t')$ は $t'=0$ すなわち $t=4$ で，上で求めた結果になるので

$$I(s')=\frac{10}{s'+2}-\frac{5}{4}\left(7+e^{-8}\right)\frac{1}{s'+2}$$

これをラプラス逆変換すると

$$i(t') = 10e^{-2t'} - \frac{5}{4}\left(7 + e^{-8}\right)e^{-2t'} = \frac{5}{4}\left(1 + e^{-8}\right)e^{-2t'}$$

ここで $t' = t - 4$ を代入すると

$$i(t) = \frac{5}{4}\left(1 + e^{-8}\right)e^{-2(t-4)} = \frac{5}{4}\left(e^{8} - 1\right)e^{-2t} \text{ [A]}$$

これらの結果は，$v(t)$ を $t = 0 \sim \infty$ まで一度にラプラス変換した結果と確かに一致している．

(c) $v(t)$ のラプラス変換は，ラプラス変換表より

$$V(s) = \mathcal{L}\left\{10\left(1 - e^{-4t}\right)u(t)\right\} = 10 \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+4}\right) = \frac{40}{s(s+4)}$$

これを $q(0) = 0$ とともに式 (1) に代入すると

$$I(s) = \frac{40}{(s+2)(s+4)}$$

逆変換積分演算を用いてラプラス逆変換すると

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = (s+2)I(s)e^{st}\Big|_{s=-2} + (s+4)I(s)e^{st}\Big|_{s=-4} \\ &= \frac{40}{s+4}e^{st}\Big|_{s=-2} \frac{40}{s+2}e^{st}\Big|_{s=-4} = 20e^{-2t} - 20e^{-4t} = 20e^{-2t}\left(1 - e^{-2t}\right) \text{ [A]} \end{aligned}$$

抵抗で消費されるエネルギーは

$$\begin{aligned} W_R &= \int_0^\infty Ri(t)^2 dt = \int_0^\infty 400e^{-4t}\left(1 - 2e^{-2t} + e^{-4t}\right)dt \\ &= \int_0^\infty 400\left(e^{-4t} - 2e^{-6t} + e^{-8t}\right)dt = \left[-100e^{-4t} + \frac{400}{3}e^{-6t} - 50e^{-8t}\right]_0^\infty \\ &= 100 - \frac{400}{3} + 50 = \frac{50}{3} \text{ J} \simeq 16.67 \text{ J} \end{aligned}$$

2. まず，インパルス応答を求めるため，$v(t) = \delta(t)$ とするとそのラプラス変換は $\mathcal{L}\{v(t)\} = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ であるので，これと $q(0) = 0$ を式 (1) に代入して

$$I(s) = \frac{s}{s+2} = \frac{(s+2) - 2}{s+2} = 1 - \frac{2}{s+2}$$

であるので，インパルス応答は

$$h(t) = i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \delta(t) - 2e^{-2t}$$

と求まる．

(a) インパルス応答を利用して，与えられた電圧 $v(t)$ に対する電流 $i(t)$ を求めるには以下の積分を行えば良い．

$$i(t) = \int_0^t h(\tau)v(t-\tau)d\tau = \int_0^t \left(\delta(\tau) - 2e^{-2\tau}\right) \cdot 10u(t-\tau)d\tau$$

ここで，積分範囲 $\tau = 0 \sim t$ の範囲で $t - \tau > 0$ であるので，$u(t-\tau) \to 1$ として整理すると

$$
\begin{aligned}
i(t) &= = 10\int_0^t \delta(\tau)d\tau - 10\int_0^t 2e^{-2\tau}d\tau = 10 - 10\left[-e^{-2\tau}\right]_0^t \\
&= 10 - 10\left(-e^{-2t}+1\right) = 10e^{-2t}\ [\mathrm{A}]
\end{aligned}
$$

ここで，$\delta(t)$ の $t=0$ を含む範囲での積分は 1 になることを利用している．

(b) 前問と同様に

$$
i(t) = \int_0^t h(\tau)v(t-\tau)d\tau
$$

に代入して解けば良いが，$v(t-\tau)$ は $t-\tau$ の値が 4 より大きいか小さいかによりことなるので，$t<4$ と $t>4$ の場合に分けて考える．まず，$t<4$ の場合には，$t-\tau<4$ であるので，$v(t-\tau) = \frac{5}{2}(t-\tau)$ であるので

$$
\begin{aligned}
i(t) &= \int_0^t \left(\delta(\tau) - 2e^{-2\tau}\right)\cdot\frac{5}{2}(t-\tau)d\tau \\
&= \int_0^t \delta(\tau)\cdot\frac{5}{2}(t-\tau)d\tau - 5t\int_0^t e^{-2\tau}d\tau + 5\int_0^t \tau e^{-2\tau}d\tau \\
&= \frac{5}{2}(t-0) - 5t\left[\frac{e^{-2\tau}}{-2}\right]_0^t + 5\left[\tau\cdot\frac{e^{-2\tau}}{-2}\right]_0^t + 5\int\frac{e^{-2\tau}}{2}d\tau \\
&= \frac{5}{2}t + \frac{5}{2}t\left(e^{-2t}-1\right) - \frac{5}{2}\left(te^{-2t}-0\right) + 5\left[\frac{e^{-2\tau}}{-4}\right]_0^t \\
&= \frac{5}{4}\left(1-e^{-2t}\right)\ [\mathrm{A}]
\end{aligned}
$$

ここで，$\int_0^a \delta(\tau)f(\tau)d\tau$ の積分は，$a>0$ すなわち積分範囲が 0 を含むとき $f(0)$ であることを利用している．

一方，$t > 4$ のときには，積分範囲を分けて考える．$0 < t-\tau < 4$ となるのは $t-4<\tau<t$ の範囲であり，$0<\tau<t-4$ で $t-\tau>4$ であるので

$$
i(t) = \int_0^{t-4}\left(\delta(\tau)-2e^{-2\tau}\right)\cdot 10d\tau + \int_{t-4}^t\left(\delta(\tau)-2e^{-2\tau}\right)\cdot\frac{5}{2}(t-\tau)d\tau
$$

ここで，右辺第 2 項の積分に $\delta(\tau)$ が含まれているが，積分区間 $(t \sim t-4)$ は 0 を含まないので，第 2 項の $\delta(\tau)$ を含む積分は 0 となり

$$
i(t) = \int_0^{t-4}\left(\delta(\tau)-2e^{-2\tau}\right)\cdot 10d\tau - \int_{t-4}^t 5(t-\tau)e^{-2\tau}d\tau
$$

となる．この積分を実行すると

$$
\begin{aligned}
i(t) &= 10 + \left[10e^{-2\tau}\right]_0^{t-4} - \left[5(t-\tau)\cdot\frac{e^{-2\tau}}{-2}\right]_{t-4}^t + \int_{t-4}^t\frac{5}{2}\cdot e^{-2\tau}d\tau \\
&= 10 + 10e^{-2(t-4)} - 10 - 0 + 5\cdot 4\cdot\frac{e^{-2(t-4)}}{-2} + \left[-\frac{5}{4}\cdot e^{-2\tau}\right]_{t-4}^t \\
&= \frac{5}{4}\left(-e^{-2t}+e^{-2(t-4)}\right) = \frac{5}{4}\left(e^8-1\right)e^{-2t}\ [\mathrm{A}]
\end{aligned}
$$

この結果も問 1 と一致している．

(c) 与えられている式に代入すると

$$
\begin{aligned}
i(t) &= \int_0^t h(\tau)v(t-\tau)d\tau = \int_0^t \left(\delta(\tau) - 2e^{-2\tau}\right) \cdot 10\left(1 - e^{-4(t-\tau)}\right) d\tau \\
&= 10\int_0^t \delta(\tau)\left(1 - e^{-4(t-\tau)}\right) d\tau - \int_0^t 20\left(e^{-2\tau} - e^{-4t} \cdot e^{2\tau}\right) d\tau \\
&= 10\left(1 - e^{-4t}\right) - \left[-10e^{-2\tau} - 10e^{-4t} \cdot e^{2\tau}\right]_0^t \\
&= 10 - 10e^{-4t} + 10e^{-2t} + 10e^{-2t} - 10 - 10e^{-4t} \\
&= 20\left(1 - e^{-2t}\right) e^{-2t} \text{ [A]}
\end{aligned}
$$