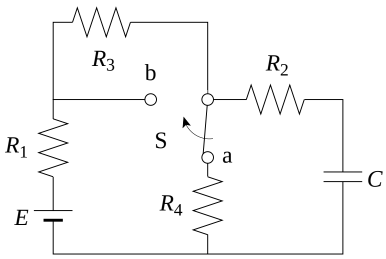
H19 年度電気回路 II 宿題 (第 13 回)

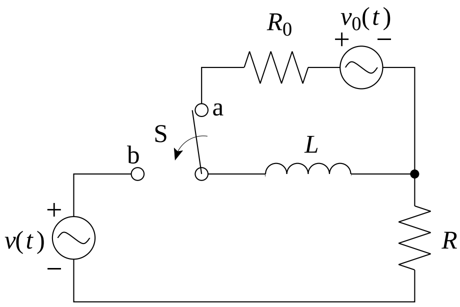
課題

以下の回路に対する $t > 0$ での過渡現象をラプラス変換を利用して解け．同じ問題が過去の宿題にあるので答が一致することを確認すること．

1. 以下の回路において，時刻 $t = 0$ でスイッチ S が端子 a から端子 b に切り替わるものとする．ただし，$R_1 = 2\ \Omega$，$R_2 = 6\ \Omega$，$R_3 = 10\ \Omega$，$R_4 = 12\ \Omega$，$L = 4$ H，$C = 0.5$ F，$E = 32$ V とする．



2. 以下の回路において，時刻 $t = 0$ でスイッチ S が端子 a から端子 b に切り替わるものとする．ただし，$R_0 = 5\ \Omega$，$R = 15\ \Omega$，$L = 1$ H，$v_0(t) = 10\sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$ V，$v(t) = 20\sin\left(5\sqrt{3}t - \frac{\pi}{6}\right)$ V とする．また，t の単位は秒とする．

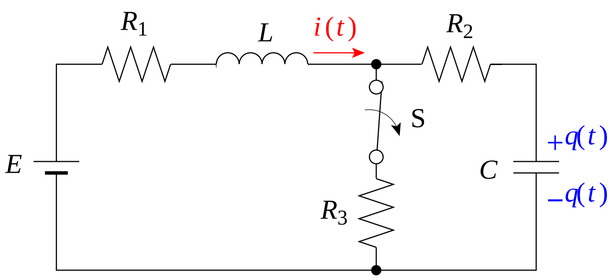


3. 以下の回路において，時刻 $t = 0$ でスイッチ S が開くものとする．以下の各場合について電流 $i(t)$ と電荷 $q(t)$ の時間変化を求めよ．ただし，t の単位は秒とする．

   (a) $E = 50$ V，$R_1 = 2\ \Omega$，$R_2 = 10\ \Omega$，$R_3 = 8\ \Omega$，$L = 2$ H，$C = \frac{1}{18}$ F

   (b) $E = 50$ V，$R_1 = 2\ \Omega$，$R_2 = 10\ \Omega$，$R_3 = 8\ \Omega$，$L = 2$ H，$C = \frac{1}{10}$ F

   (c) $E = 50$ V，$R_1 = 2\ \Omega$，$R_2 = 10\ \Omega$，$R_3 = 8\ \Omega$，$L = 2$ H，$C = \frac{1}{20}$ F



解答

1. $t > 0$ での回路の回路方程式は宿題 8-2 より

$$(R_1 + R_2)i(t) + \frac{q(t)}{C} = E \quad \to \quad (R_1 + R_2)i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = E$$

上式をラプラス変換し，具体的な数値を代入すると

$$(R_1 + R_2)I(s) + \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{s}\left\{I(s) + \int i(t)dt\Big|_{t=0}\right\} = \frac{E}{s} \quad \to \quad 8I(s) + \frac{2}{s}\left(I(s) + 8\right) = \frac{32}{s}$$

ここで，初期条件として宿題 8-2 より $q(0) = \int i(t)dt|_{t=0} = 8$ C を用いた．上式を $I(s)$ について解くと

$$I(s) = \frac{8}{4s+1} = \frac{2}{s+\frac{1}{4}}$$

これをラプラス逆変換すると

$$i(t) = \mathscr{L}^{-1}\{I(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+\frac{1}{4}}\right\} = 2e^{-\frac{t}{4}} \text{ [A]}$$

電荷 $q(t)$ を求めるには電流を積分すれば良く

$$q(t) = q(0) + \int_0^t i(t)dt = 8 + \left[-8e^{-\frac{t}{4}}\right]_0^t = 8 - 8e^{-\frac{t}{4}} + 8 = 16 - 8e^{-\frac{t}{4}} \text{ [C]}$$

2. $t > 0$ での回路の回路方程式は宿題 10-1 より，具体的に数値を代入して

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 20\sin\left(5\sqrt{3}t - \frac{\pi}{6}\right) \quad \to \quad \frac{di(t)}{dt} + 15i(t) = 20\sin\left(5\sqrt{3}t - \frac{\pi}{6}\right)$$

また

$$20\sin\left(5\sqrt{3}t - \frac{\pi}{6}\right) = 20\left\{\sin 5\sqrt{3}t\cos\frac{\pi}{6} - \cos 5\sqrt{3}t\sin\frac{\pi}{6}\right\} = 10\left\{\sqrt{3}\sin 5\sqrt{3}t - \cos 5\sqrt{3}t\right\}$$

であるので，回路方程式をラプラス変換し，宿題 10-1 から $i(0) = 1$ A であることを用いると

$$\{sI(s) - i(0)\} + 15I(s) = 10\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{3} - s}{s^2 + (5\sqrt{3})^2} \quad \to \quad (s+15)\,I(s) = \frac{-10(s-15)}{s^2+75} + 1$$

ここで，上式を $I(s)$ について解くと

$$I(s) = \frac{-10(s-15)}{(s^2+75)(s+15)} + \frac{1}{s+15}$$

上式を

$$I(s) = \frac{K_1 s + K_2}{s^2+75} + \frac{K_3}{s+15} + \frac{1}{s+15} = \frac{(K_1+K_3)s^2 + (15K_1+K_2)s + (15K_2+75K_3)}{(s^2+75)(s+15)}$$

のように変形し，係数比較により K_1，K_2，K_3 を求めると

$$\begin{cases} K_1 + K_3 = 0 \\ 15K_1 + K_2 = -1015K_2 + 75K_3 = 150 \end{cases} \quad \rightarrow \quad K_1 = -1,\ \ K_2 = 5,\ \ K_3 = 1$$

したがって

$$I(s) = \frac{-s+5}{s^2+75} + \frac{2}{s+15} = \frac{-s + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 5\sqrt{3}}{s^2 + (5\sqrt{3})^2} + \frac{2}{s+15}$$

これをラプラス逆変換すると

$$i(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{I(s)\right\} = -\cos 5\sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 5\sqrt{3}t + 2e^{-15t}\ [\mathrm{A}]$$

上式をもう少し変形すると

$$i(t) = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\sin\left(5\sqrt{3}t + \phi\right) + 2e^{-15t} \qquad \left(\phi = \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{1} = -\frac{\pi}{3}\right)$$

$$i(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(5\sqrt{3}t - \frac{\pi}{3}\right) + 2e^{-15t}\ [\mathrm{A}]$$

3. $t > 0$ での回路方程式は

$$L\frac{di(t)}{dt} + (R_1+R_2)i(t) + \frac{q(t)}{C} = E \quad \rightarrow \quad L\frac{di(t)}{dt} + (R_1+R_2)i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = E$$

これをラプラス変換して $I(s)$ について解くと

$$L\left\{sI(s) - i(0)\right\} + (R_1+R_2)I(s) + \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{s}\left\{sI(s) + q(0)\right\} = \frac{E}{s}$$

$$I(s) = \frac{E + si(0) - \frac{q(0)}{C}}{s^2L + s(R_1+R_2) + \frac{1}{C}}$$

と求まる．

(a) 与えられた値を代入すると，宿題 11-1 より，$i(0) = 5$ A，$q(0) = \frac{20}{9}$ C であるので

$$I(s) = \frac{50 + 10s - 40}{2s^2 + 12s + 18} = \frac{5s+5}{(s+3)^2} = \frac{5(s+3) - 10}{2(s+3)^2} = 5\left(\frac{1}{s+3} - \frac{2}{(s+3)^2}\right)$$

上式をラプラス逆変換すると

$$i(t) = 5(1-2t)e^{-3t}\ [\mathrm{A}]$$

(b) 与えられた値を代入すると，宿題 11-2 より，$i(0) = 5$ A，$q(0) = 4$ C であるので

$$I(s) = \frac{50 + 10s - 40}{2s^2 + 12s + 10} = \frac{5s + 5}{s^2 + 6s + 5} = \frac{5(s + 1)}{(s + 1)(s + 5)} = \frac{5}{s + 5}$$

上式をラプラス逆変換すると

$$i(t) = 5e^{-5t} \text{ [A]}$$

(c) 与えられた値を代入すると，宿題 11-3 より，$i(0) = 5$ A，$q(0) = 2$ C であるので

$$I(s) = \frac{50 + 10s - 40}{2s^2 + 12s + 20} = \frac{5s + 5}{s^2 + 6s + 10} = \frac{5s + 5}{(s + 3)^2 + 1} = \frac{5(s + 3) - 10 \cdot 1}{(s + 3)^2 + 1}$$

上式を推移定理を利用してラプラス逆変換すると

$$i(t) = 5e^{-3t} \cos t - 10e^{-3t} \sin t = 5e^{-3t} (\cos t - 2 \sin t) \text{ [A]}$$

4. 宿題 8-1 に対応する解答

回路方程式は以下のように与えられている

$$L\frac{di(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i(t) = E$$

上式のラプラス変換は

$$L\{sI(s) - i(0)\} + (R_1 + R_2)I(s) = \frac{E}{s} \quad \rightarrow \quad 4\{sI(s) - i(0)\} + 8I(s) = \frac{32}{s}$$

であり，宿題 8-1 より，$i(0) = \frac{4}{3}$ A を代入して $I(s)$ について解くと

$$I(s) = \frac{4s + 24}{3s(s + 2)}$$

上式のラプラス逆変換は

$$\begin{aligned} i(t) &= sI(s)e^{st}\Big|_{s=0} + (s + 2)I(s)e^{st}\Big|_{s=-2} = \frac{4s + 24}{3(s + 2)}e^{st}\Big|_{s=0} + \frac{4s + 24}{3s}e^{st}\Big|_{s=-2} \\ &= 4 - \frac{8}{e}e^{-2t} \text{ [A]} \end{aligned}$$

5. 宿題 10-2 に対応する解答

回路方程式は以下のように与えられている

$$Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = v(t) \quad \rightarrow \quad Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = v(t)$$

ここで

$$\begin{aligned} v(t) &= 20 \sin\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}t - \frac{\pi}{6}\right) = 20\left(\sin\frac{5}{\sqrt{3}}t \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{5}{\sqrt{3}}t \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 10\left(\sqrt{3}\sin\frac{5}{\sqrt{3}}t - \cos\frac{5}{\sqrt{3}}t\right) \end{aligned}$$

具体的な数値を代入すると

$$15i(t) + 25\int i(t)dt = 10\left(\sqrt{3}\sin\frac{5}{\sqrt{3}}t - \cos\frac{5}{\sqrt{3}}t\right)$$

上式をラプラス変換すると

$$15I(s) + \frac{25}{s}\left\{I(s) + q(0)\right\} = 10 \cdot \frac{5-s}{s^2 + \frac{25}{3}}$$

$q(0) = \frac{1}{5}$ C であることを考慮して $I(s)$ を求めると

$$(15s+25)I(s) = \frac{10s(5-s)}{s^2+\frac{25}{3}} - 5 \qquad \to \qquad I(s) = \frac{-6s(s-5)}{(3s+5)\left(3s^2+25\right)} - \frac{1}{3s+5}$$

上式をラプラス逆変換できる形に変形する

$$I(s) = \frac{K_1 s + K_2}{3s^2+25} + \frac{K_3}{3s+5} - \frac{1}{3s+5} = \frac{(3K_1+3K_3)s^2 + (5K_1+3K_2)s + (5K_2+25K_3)}{(3s+5)(3s^2+25)} - \frac{1}{3s+5}$$

係数比較により

$$\begin{cases} 3K_1 + 3K_3 = -6 \\ 5K_1 + 3K_2 = 30 \\ 5K_2 + 25K_3 = 0 \end{cases} \qquad \to \qquad K_1 = 0,\quad K_2 = 10,\quad K_3 = -2$$

したがって

$$I(s) = \frac{10}{3s^2+25} + \frac{-2}{3s+5} - \frac{1}{3s+5} = \frac{\frac{10}{3}}{s^2+\frac{25}{3}} - \frac{1}{s+\frac{5}{3}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{5}{\sqrt{3}}}{s^2+\frac{25}{3}} - \frac{1}{s+\frac{5}{3}}$$

上式をラプラス逆変換すると

$$i(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{5}{\sqrt{3}}t\right) - e^{-\frac{5}{3}t} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}t\right) - e^{-\frac{5}{3}t}\ [\mathrm{A}]$$