H19 年度電気回路 II 宿題 (第 12 回)

課題

1. 以下の関数をラプラス変換の定義

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

に従ってラプラス変換せよ．ただし，$\mathcal{L}\{i(t)\} = I(s)$ とする．

$$\frac{di(t)}{dt}, \quad \int i(t)dt, \quad u(t-T), \quad e^{-at}, \quad \sin(\omega t), \quad \cos(\omega t), \quad t^2$$

2. 推移定理を証明し，以下の関数を上の結果と推移定理を用いてラプラス変換せよ．

$$e^{-at}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right), \quad t^2 e^{-at}$$

3. 以下の関数をラプラス逆変換せよ．(2 番目の問題を変更しているが，宿題は変更前の問題で採点しています)

$$\frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad \frac{as}{(s+2)^2+\omega^2}, \quad \frac{3s+4}{s^2+5s+6}, \quad \frac{1}{(s+1)^2(s+2)}, \quad \frac{1}{(s+1)(s^2+4)}$$

解答

1. (a) 部分積分を利用して解く

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{di(t)}{dt}\right\} &= \int_0^\infty \frac{di(t)}{dt}e^{-st}dt = \left[i(t)e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty i(t)\left(-se^{-st}\right)dt \\ &= \{0 - i(0)\} + s\int_0^\infty i(t)e^{-st}dt = -i(0) + sI(s) \\ &= sI(s) - i(0)\end{aligned}$$

(b) $i(t) = \frac{df(t)}{dt}$ と置いて，(a) の結果を利用する．

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = sF(s) - f(0) \quad \rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s}\left(I(s) + f(0)\right)$$

ここで，$f(t) = \int i(t)dt$ であるので

$$\mathcal{L}\left\{\int i(t)dt\right\} = F(s) = \frac{1}{s}\left(I(s) + \int i(t)dt\Big|_{t=0}\right)$$

(c) $u(t-T)$ は $t > T$ で値が 1，$t < T$ で値が 0 であるので

$$\mathcal{L}\{u(t-T)\} = \int_0^\infty u(t-T)e^{-st}dt = \int_T^\infty e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_T^\infty = \frac{e^{-Ts}}{s} \qquad (1)$$

(d)

$$\mathcal{L}\left\{e^{-at}\right\} = \int_0^\infty e^{-at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-(s+a)}\right]_0^\infty = \frac{1}{s+a} \tag{2}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\sin\omega t\right\} &= \int_0^\infty \sin\omega t\cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{j2}\cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{e^{-(s-j\omega)t}-e^{-(st+j\omega)t}}{j2}dt \\
&= \frac{1}{j2}\left[\frac{e^{-(s-j\omega)t}}{-(s-j\omega)}-\frac{e^{-(s+j\omega)t}}{-(s+j\omega)}\right]_0^\infty = \frac{1}{j2}\left[\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right] = \frac{1}{j2}\cdot\frac{j2\omega}{s^2+\omega^2} \\
&= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\cos\omega t\right\} &= \int_0^\infty \cos\omega t\cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}\cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{e^{-(s-j\omega)t}+e^{-(st+j\omega)t}}{2}dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-(s-j\omega)t}}{-(s-j\omega)}+\frac{e^{-(s+j\omega)t}}{-(s+j\omega)}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{s+j\omega}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{2s}{s^2+\omega^2} \\
&= \frac{s}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{t^2\right\} &= \int_0^\infty t^2\cdot e^{-st}dt = \left[t^2\cdot\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{2te^{-st}}{s}dt \\
&= \{0-0\} + \left[2t\cdot\frac{e^{-st}}{-s^2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{2e^{-st}}{s^2}dt = \left[\frac{2e^{-st}}{-s^3}\right]_0^\infty = \frac{2}{s^3}
\end{aligned}$$

2. 推移定理は以下のように証明できる

$$\mathcal{L}\left\{e^{-bt}f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-bt}f(t)\cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+b)t}dt$$

$s+b=s'$ と置き，$f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とすると

$$\mathcal{L}\left\{e^{-bt}f(t)\right\} = \int_0^\infty f(t)e^{-s't}dt = F(s') = F(s+b)$$

(a) $f(t)$ を以下のように置く (三角関数の加法定理を利用)

$$f(t) = \cos\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\omega t\cos\frac{\pi}{6} - \sin\omega t\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\cos\omega t - \sin\omega t\right)$$

$f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は，1 の結果より

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s) = \frac{\sqrt{3}s-\omega}{2(s^2+\omega^2)}$$

推移定理を用いると

$$\mathcal{L}\left\{e^{-at}\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right)\right\}=\mathcal{L}\left\{e^{-at}f(t)\right\}=F(s+a)=\frac{\sqrt{3}(s+a)-\omega}{2((s+a)^2+\omega^2)}$$

(b) $f(t)=t^2$ と置いて推移定理を用いると

$$\mathcal{L}\left\{t^2\right\}=F(s)=\frac{2}{s^3}$$

であるので

$$\mathcal{L}\left\{t^2e^{-at}\right\}=F(s+a)=\frac{2}{(s+a)^3}$$

3. (a) 1(f) の結果より

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\omega^2}\right\}=\cos\omega t$$

(b) 1(f),(g) の結果と推移定理を用いる

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{as}{(s+2)^2+\omega^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a(s+2)-2a}{(s+2)^2+\omega^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a(s+2)}{(s+2)^2+\omega^2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-(2a/\omega)\cdot\omega}{(s+2)^2+\omega^2}\right\}\\ &= ae^{-2t}\left(\cos\omega t-\frac{2}{\omega}\sin\omega t\right)\end{aligned}$$

(c)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+4}{s^2+5s+6}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+4}{(s+2)(s+3)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K_1}{s+2}+\frac{K_2}{s+3}\right\}$$

ここで $F(s)=\frac{3s+4}{(s+2)(s+3)}$ とすると

$$K_1=(s+2)F(s)|_{s=-2}=\left.\frac{3s+4}{s+3}\right|_{s=-2}=-2$$

$$K_2=(s+3)F(s)|_{s=-3}=\left.\frac{3s+4}{s+2}\right|_{s=-3}=5$$

以上より

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+4}{s^2+5s+6}\right\}=K_1e^{-2t}+K_2e^{-3t}=-2e^{-2t}+5e^{-3t}$$

(d)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K_1}{(s+1)^2}+\frac{K_2}{s+1}+\frac{K_3}{s+2}\right\}$$

ここで，$F(s)=\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}$ と置くと，K_1，K_3 に関しては，以下のように簡単に求まる．

$$K_1=(s+1)^2F(s)\Big|_{s=-1}=\left.\frac{1}{s+2}\right|_{s=-1}=1$$

$$K_3=(s+2)F(s)|_{s=-2}=\left.\frac{1}{(s+1)^2}\right|_{s=-2}=1$$

これらを，もとの式に代入すると

$$\begin{aligned}&\frac{K_1}{(s+1)^2}+\frac{K_2}{s+1}+\frac{K_3}{s+2}=\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{K_2}{s+1}+\frac{1}{s+2}=\frac{(s+2)+K_2(s+1)(s+2)+(s+1)^2}{(s+1)^2(s+2)}\\&=\frac{(K_2+1)s^2+(3K_2+3)s+(2K_2+3)}{(s+1)^2(s+2)}\end{aligned}$$

s^2 の係数は 0 であるので，係数比較により，$K_2=-1$ が求まる．この結果を s，1 の係数に代入すると確かに元の式と一致することが確かめられる．したがって，ラプラス変換表と推移定理を用いて

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}\right\}&=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{-1}{s+1}+\frac{1}{s+2}\right\}=te^{-t}-e^{-t}+e^{-2t}\\&=(t-1)e^{-t}+e^{-2t}\end{aligned}$$

(e) ラプラス変換表を用いることを考えて，以下のよに変形する

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+4)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K_1}{s+1}+\frac{K_2s+K_3}{s^2+4}\right\}$$

$$\frac{K_1}{s+1}+\frac{K_2s+K_3}{s^2+4}=\frac{K_1(s^2+4)+(s+1)(K_2s+K_3)}{(s+1)(s^2+4)}=\frac{(K_1+K_2)s^2+(K_2+K_3)s+(4K_1+K_3)}{(s+1)(s^2+4)}$$

であるので，係数比較により

$$\begin{cases}K_1+K_2=0 & \rightarrow \quad K_1=-K_2\\ K_2+K_3=0 & \rightarrow \quad K_3=-K_2\\ 4K_1+K_3=1 & \rightarrow \quad -4K_2-K_2=1 \quad \rightarrow \quad K_2=-\frac{1}{5}\end{cases}$$

よって

$$K_1=\frac{1}{5},\quad K_2=-\frac{1}{5},\quad K_3=\frac{1}{5}$$

以上より

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+4)}\right\}=\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}+\frac{-s+1/2\cdot 2}{s^2+4}\right\}=\frac{1}{5}\left(e^{-t}-\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)p$$