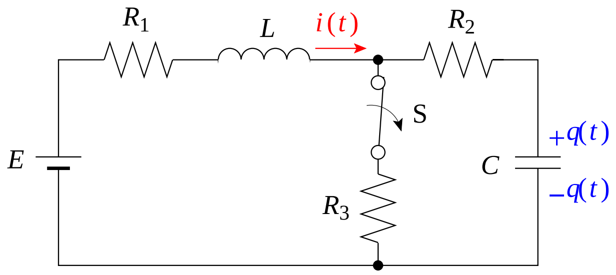
H19 年度電気回路 II 宿題 (第 10 回)

課題

以下の回路において，時刻 $t = 0$ でスイッチ S が開くものとする．以下の各場合について電流 $i(t)$ と電荷 $q(t)$ の時間変化を求めよ．ただし，t の単位は秒とする．

1. $E = 50$ V，$R_1 = 2\ \Omega$，$R_2 = 10\ \Omega$，$R_3 = 8\ \Omega$，$L = 2$ H，$C = \frac{1}{18}$ F
2. $E = 50$ V，$R_1 = 2\ \Omega$，$R_2 = 10\ \Omega$，$R_3 = 8\ \Omega$，$L = 2$ H，$C = \frac{1}{10}$ F
3. $E = 50$ V，$R_1 = 2\ \Omega$，$R_2 = 10\ \Omega$，$R_3 = 8\ \Omega$，$L = 2$ H，$C = \frac{1}{20}$ F



解答

まず，$t < 0$ の初期状態について考える．この場合，コンデンサには電流が流れず，コイルの抵抗は 0 になるので

$$
\begin{aligned}
i(0) &= \frac{E}{R_1 + R_3} = \frac{50}{10} = 5 \text{ A} \\
q(0) &= C\frac{R_3 E}{R_1 + R_3} = 40C \text{ [C]} \quad (C \text{ の値は問題により異なる})
\end{aligned}
$$

次に，$t > 0$ での解を考える．このとき回路方程式は

$$
L\frac{di(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i(t) + \frac{q(t)}{C} = E
$$

と書くことができ，$i(t) = dq(t)/dt$ の関係を用いると

$$
L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + (R_1 + R_2)\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E
$$

を得る．$q(t)$ を定常解 $q_s(t)$ と過渡解 $q_t(t)$ に分け，定常解に対しては (直流電源なので) $d/dt \to 0$ であることを利用すると

$$
L\frac{d^2q_s(t)}{dt^2} + (R_1 + R_2)\frac{dq_s(t)}{dt} + \frac{q_s(t)}{C} = E \quad \to \quad \frac{q_s(t)}{C} = E \quad \to \quad q_s(t) = CE
$$

過渡解に対しては，$E \to 0$ と置いて

$$
\frac{d^2q_t(t)}{dt^2} + (R_1 + R_2)\frac{dq_t(t)}{dt} + \frac{q_t(t)}{C} = 0
$$

という 2 階の微分方程式を得るので，$q_t(t) = Ae^{mt}$ なる解を仮定し，上式に代入すると

$$
\left(Lm^2 + (R_1 + R_2)m + \frac{1}{C}\right) q_t(t) = 0
$$

を得る．上式の $q_t(t)$ は 0 ではないので，特性方程式

$$Lm^2 + (R_1 + R_2)m + \frac{1}{C} = 0$$

を解いて，m の値を計算することで，過渡解 $q_t(t)$ を求める．

1. $t = 0$ での初期条件は

$$i(0) = 5 \text{ A} \qquad q(0) = 40C = \frac{20}{9} \text{ C}$$

$t \to \infty$ での定常解は

$$q_s(t \to \infty) = CE = \frac{25}{9} \text{ C}$$

特性方程式の根は

$$2m^2 + 12m + 18 = 0 \quad \to \quad 2(m+3)^2 = 0 \quad \to \quad m = 3 \text{ (重解)}$$

したがって，過渡解は以下のように書ける．

$$q_t(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-3t} \ [C]$$

また，電荷と電流の一般解は以下のように書ける

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{25}{9} + (A_1 + A_2 t)e^{-3t} \ [C] \\ i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} = A_2 e^{-3t} + (A_1 + A_2 t)\left(-3e^{-3t}\right) = \{(-3A_1 + A_2) - 3A_2 t\} e^{-3t} \text{ A} \end{aligned}$$

初期条件を代入して未知定数 A_1，A_2 を求めると

$$\begin{cases} \frac{25}{9} + A_1 = \frac{20}{9} \\ -3A_1 + A_2 = 5 \end{cases} \quad \to \quad A_1 = -\frac{5}{9}, \quad A_2 = \frac{10}{3}$$

よって，求める解は

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{5}{9}\left\{5 - (1 - 6t)e^{-3t}\right\} \ [\text{C}] \\ i(t) &= 5\,(1 - 2t)\,e^{-3t} \ [\text{A}] \end{aligned}$$

2. $t = 0$ での初期条件は

$$i(0) = 5 \text{ A} \qquad q(0) = 40C = 4 \text{ C}$$

$t \to \infty$ での定常解は

$$q_s(t \to \infty) = CE = 5 \text{ C}$$

特性方程式の根は

$$2m^2+12m+10=0 \quad\rightarrow\quad 2(m^2+6m+5)=0 \quad\rightarrow\quad 2(m+1)(m+5)=0 \quad\rightarrow\quad m=-1,\ -5$$

したがって，過渡解は以下のように書ける．

$$q_t(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-5t}\ [C]$$

また，電荷と電流の一般解は以下のように書ける

$$\begin{aligned} q(t) &= 5+A_1e^{-t}+A_2e^{-5t}\ [C] \\ i(t) &= \frac{dq(t)}{dt}=-A_1e^{-t}-5A_2e^{-5t}\ \mathrm{A} \end{aligned}$$

初期条件を代入して未知定数 A_1，A_2 を求めると

$$\begin{cases} 5+A_1+A_2=4 \\ -A_1-5A_2=5 \end{cases} \quad\rightarrow\quad A_1=0, \quad A_2=-1$$

よって，求める解は

$$\begin{aligned} q(t) &= 5-e^{-5t}\ [\mathrm{C}] \\ i(t) &= 5e^{-5t}\ [\mathrm{A}] \end{aligned}$$

3. $t=0$ での初期条件は

$$i(0)=5\ \mathrm{A} \qquad q(0)=40C=2\ \mathrm{C}$$

$t\rightarrow\infty$ での定常解は

$$q_s(t\rightarrow\infty)=CE=\frac{5}{2}\ \mathrm{C}$$

特性方程式の根は

$$2m^2+12m+20=0 \quad\rightarrow\quad 2(m^2+6m+10)=0 \quad\rightarrow\quad m=-3\pm\sqrt{3^2-10}=-3\pm j$$

したがって，過渡解は以下のように書ける．

$$q_t(t)=(A_1\cos t+A_2\sin t)\,e^{-3t}\ [C]$$

また，電荷と電流の一般解は以下のように書ける

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{5}{2}+(A_1\cos t+A_2\sin t)\,e^{-3t}\ [C] \\ i(t) &= \frac{dq(t)}{dt}=\{(-3A_1+A_2)\cos t+(-A_1-3A_2)\}\,e^{-3t}\ \mathrm{A} \end{aligned}$$

初期条件を代入して未知定数 A_1，A_2 を求めると

$$\begin{cases} \frac{5}{2} + A_1 = 2 \\ -3A_1 + A_2 = 5 \end{cases} \quad \rightarrow \quad A_1 = -\frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{7}{2}$$

よって，求める解は

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\left(\cos t - 7\sin t\right) e^{-3t} \ \mathrm{[C]} \\ i(t) &= 5\left(\cos t - 2\sin t\right) e^{-3t} \ \mathrm{[A]} \end{aligned}$$