H19 年度電気回路 II 宿題 (第 10 回)

課題

以下の回路において，時刻 $t = 0$ でスイッチ S が端子 a から端子 b に切り替わるものとする．以下の各場合について抵抗 R に流れる電流の時間変化を求めよ．ただし，t の単位は秒とする．

1. 図 1 の回路で，$R_0 = 5\ \Omega$，$R = 15\ \Omega$，$L = 1$ H，$v_0(t) = 10\sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$ V，$v(t) = 20\sin\left(5\sqrt{3}t - \frac{\pi}{6}\right)$ V のとき．
2. 図 2 の回路で，$R_0 = 5\ \Omega$，$R = 15\ \Omega$，$C = 1/25$ F，$v_0(t) = 10\sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$ V，$v(t) = 20\sin\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}t - \frac{\pi}{6}\right)$ V のとき．

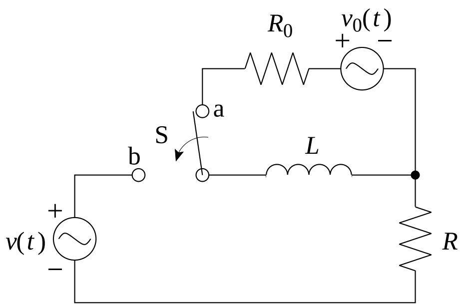


図 1

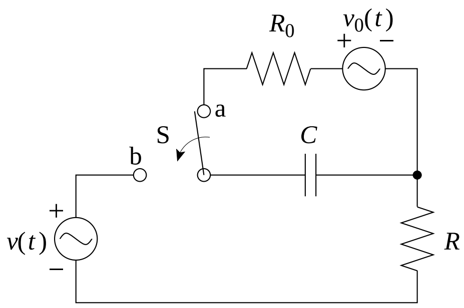
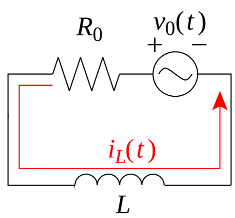


図 2

解答

1. (a) まず，$t < 0$ での状態を考えコイルに流れる電流を $i_L(t)$ とする．このとき電源の角周波数は $\omega_0 = 5$ rad/s であるので



$$L\frac{di_L}{dt} + R_0 i_L = 10\sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \rightarrow \quad (j\omega_0 L + R_0)I_L = 10e^{j\frac{\pi}{2}}$$

ここで，I_L，$10e^{j\frac{\pi}{2}}$ はそれぞれ振幅表現した電流 i_L と電圧 v_0 のフェーザである．上式を I_L について解くと

$$I_L = \frac{10e^{j\frac{\pi}{2}}}{R_0 + j\omega_0 L} = \frac{10e^{j\frac{\pi}{2}}}{5 + j5} = \frac{2e^{j\frac{\pi}{2}}}{1 + j} = \frac{2e^{j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

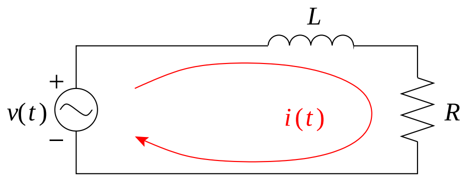
I_L を時間の関数の形で書き表すと

$$i_L(t) = \sqrt{2}\sin\left(5t + \frac{\pi}{4}\right)$$

したがって，$t = 0$ でコイルに流れる電流は

$$i_L(0) = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 1\ \text{A}$$

(b) 次に $t > 0$ を考え，回路方程式を立てると以下のように書ける



$$L\frac{di}{dt} + Ri = 20\sin\left(5\sqrt{3}t - \frac{\pi}{6}\right)$$

上式の定常解 $i_s(t)$ は以下の微分方程式を満たし，1(a) と同様にフェーザを使って右の式を得る

$$L\frac{di_s}{dt} + Ri_s = 20\sin\left(5\sqrt{3}t - \frac{\pi}{6}\right) \quad \rightarrow \quad (j\omega L + R)I_s = 20e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

ここに $\omega = 5\sqrt{3}$ であり，I は振幅表現での電流のフェーザである．I について解くと

$$I_s = \frac{20e^{-j\frac{\pi}{6}}}{R + j\omega L} = \frac{20e^{-j\frac{\pi}{6}}}{15 + j5\sqrt{3}} = \frac{4e^{-j\frac{\pi}{6}}}{3 + j\sqrt{3}} = \frac{4e^{-j\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{12}e^{\frac{\pi}{6}}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

I_s を時間の関数の形で書き表すと

$$i_s(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(5\sqrt{3}t - \frac{\pi}{3}\right)$$

一方，過渡解 $i_t(t)$ は以下の微分方程式を満たす．

$$L\frac{di_t}{dt} + Ri_t = 0$$

上式は，1 階の微分方程式であり，その階は以下のように求まる．

$$i_t(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} = Ae^{-15t} \quad (A \text{ は積分定数})$$

したがって，一般解 $i(t)$ は以下のように書ける

$$i(t) = i_s(t) + i_t(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(5\sqrt{3}t - \frac{\pi}{3}\right) + Ae^{-15t}$$

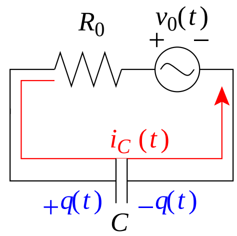
ここで，未知の積分定数 A を決めるために，1(a) で求めた結果を用いると

$$i(0) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + A = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + A = -1 + A = 1 \quad \rightarrow \quad A = 2$$

以上より，抵抗 R に流れる電流 $i(t)$ は $t \geq 0$ において以下のように表される．

$$i(t) = i_s(t) + i_t(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(5\sqrt{3}t - \frac{\pi}{3}\right) + 2e^{-15t} \text{ A}$$

2. (a) まず，$t < 0$ での状態を考えコンデンサに蓄えられている電荷を $q(t)$，コンデンサに流れる電流を $i_C(t)$ とする．このとき電源の角周波数は $\omega_0 = 5$ rad/s であるので



$$Ri_C + \frac{q}{C} = 10\sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$$

ここで，$i_C = dq/dt$ の関係を利用し式を書き換え，振幅表現のフェーザで書き表すと

$$R_0\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 10\sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \rightarrow \quad \left(j\omega_0 R_0 + \frac{1}{C}\right) Q = 10e^{j\frac{\pi}{2}}$$

ここで，Q，$10e^{j\frac{\pi}{2}}$ はそれぞれ振幅表現した電荷 $q(t)$ と電圧 v_0 のフェーザである．上式を Q について解くと

$$Q = \frac{C\cdot 10e^{j\frac{\pi}{2}}}{1 + j\omega CR_0} = \frac{\frac{2}{5}e^{j\frac{\pi}{2}}}{1+j} = \frac{2}{5}\cdot\frac{e^{j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{5}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

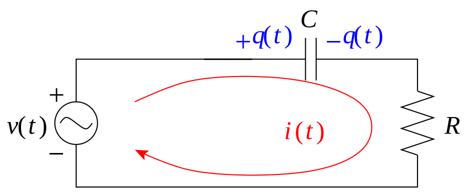
Q を時間の関数の形で書き表すと

$$q(t) = \frac{\sqrt{2}}{5}\sin\left(5t + \frac{\pi}{4}\right)$$

したがって，$t = 0$ でコンデンサに蓄えられている電荷は

$$q(0) = \frac{\sqrt{2}}{5}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{5}\ \mathrm{C}$$

(b) 次に $t > 0$ を考え，回路方程式を立てると以下のように書ける



$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 20\sin\left(\frac{5}{\sqrt{3}}t - \frac{\pi}{6}\right)$$

上式の定常解 $q_s(t)$ は以下の微分方程式を満たし，2(a) と同様にフェーザを使って右の式を得る

$$R\frac{dq_s}{dt} + \frac{q_s}{C} = 20\sin\left(\frac{5}{\sqrt{3}}t - \frac{\pi}{6}\right) \quad \rightarrow \quad \left(j\omega R + \frac{1}{C}\right) I_s = 20e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

ここに $\omega = 5/\sqrt{3}$ であり，I は振幅表現での電流のフェーザである．I について解くと

$$Q_s = \frac{C\cdot 20e^{-j\frac{\pi}{6}}}{1 + j\omega CR} = \frac{\frac{4}{5}e^{-j\frac{\pi}{6}}}{1 + j\sqrt{3}} = \frac{4}{5}\cdot\frac{e^{-j\frac{\pi}{6}}}{2e^{\frac{\pi}{3}}} = \frac{2}{5}e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Q_s を時間の関数の形で書き表すと

$$q_s(t) = \frac{2}{5}\sin\left(\frac{5}{\sqrt{3}}t - \frac{\pi}{2}\right)$$

一方，過渡解 $i_t(t)$ は以下の微分方程式を満たす．

$$R\frac{dq_t}{dt} + \frac{q_t}{C} = 0$$

上式は，1 階の微分方程式であり，その階は以下のように求まる．

$$q_t(t) = Ae^{-\frac{t}{CR}} = Ae^{-\frac{5}{3}t} \qquad (A\ は積分定数)$$

したがって，一般解 $q(t)$ は以下のように書ける

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = \frac{2}{5}\sin\left(\frac{5}{\sqrt{3}}t - \frac{\pi}{2}\right) + Ae^{-\frac{5}{3}t}$$

ここで，未知の積分定数 A を決めるために，2(a) で求めた結果を用いると

$$q(0) = \frac{2}{5}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + A = -\frac{2}{5} + A = \frac{1}{5} \qquad \rightarrow \qquad A = \frac{3}{5}$$

したがって

$$q(t) = \frac{2}{5}\sin\left(\frac{5}{\sqrt{3}}t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{5}e^{-\frac{5}{3}t} = \frac{1}{5}\left(-2\cos\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}t\right) + 3e^{-\frac{5}{3}t}\right)$$

以上より，抵抗 R に流れる電流 $i(t)$ は $t \geq 0$ において以下のように表される．

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}t\right) - e^{-\frac{5}{3}t}\ \mathrm{A}$$