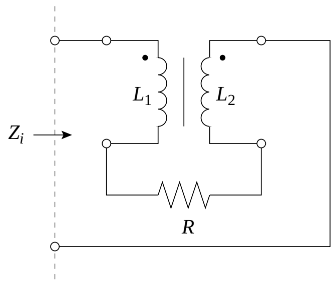
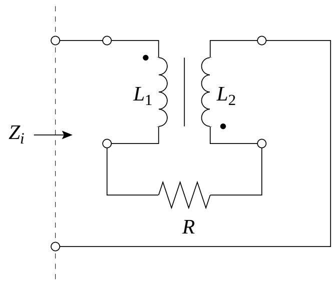
H19 年度電気回路 II 宿題

課題

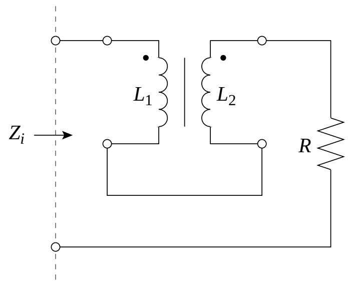
以下の変成器を含む回路に対して，端子から右側を見たインピーダンス Z_i を求めよ．ただし，1 次側，2 次側のジコインダクタンスを L_1，L_2 ，相互インダクタンスを M，電源の角周波数は ω とする．



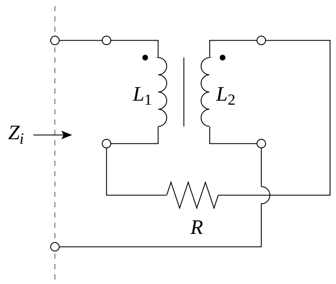
(a)



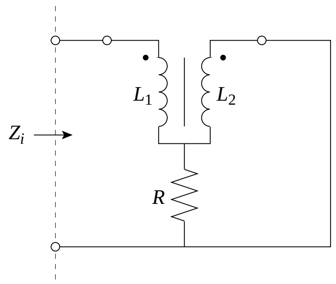
(b)



(c)



(d)



(e)

解答

(a) 図 (a-1) のように電流，電圧を考えると，変成器の基本式およびオームの法則より

$$
\begin{aligned}
V_1 &= j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 = j\omega(L_1 - M)I_i \\
V_2 &= j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 = j\omega(M - L_2)I_i \\
V_R &= RI_i \\
V_i &= V_1 + V_R - V_2
\end{aligned}
$$

ここで，$I_i = I_1 = -I_2$ であることを利用している．また，仮定している電圧降下の向き (矢印の向き) に注意すること．

与えられた関係式から，V_i を I_i で表現すると，

$$
\begin{aligned}
V_i &= j\omega(L_1 - M)I_i + RI_i - j\omega(M - L_2)I_i \\
&= \{R + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)\}I_i
\end{aligned}
$$

したがって，回路の入力インピーダンスは以下のように求まる．

$$
Z_i = \frac{V_i}{I_i} = R + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)
$$

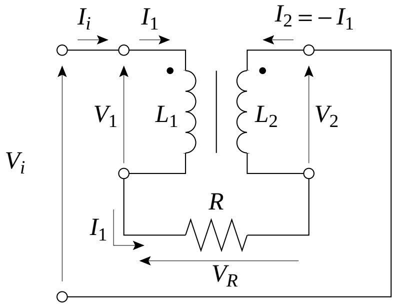


図 (a-1)

(別解)

制御電源を用いた等価回路を利用しても解くことができる．問題の回路を図 (a-2) のように制御電源を用いた等価回路で置き換えた後，見やすい形に書き直すと，コイル，抵抗，電圧源が直列接続された回路が得られる．回路に流れる電流を I_i として，電圧降下の向きに注意して，電圧 V_i を求めると．

$$\begin{aligned} V_i &= j\omega L_1 I_i + j\omega M I_2 + R I_i - j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_i \\ &= \{R + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)\} I_i \end{aligned}$$

ここで，$I_i = I_1 = -I_2$ であることを利用している．したがって，回路の入力インピーダンスは以下のように求まる．

$$Z_i = \frac{V_i}{I_i} = R + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)$$

これは前述の結果と同じである．

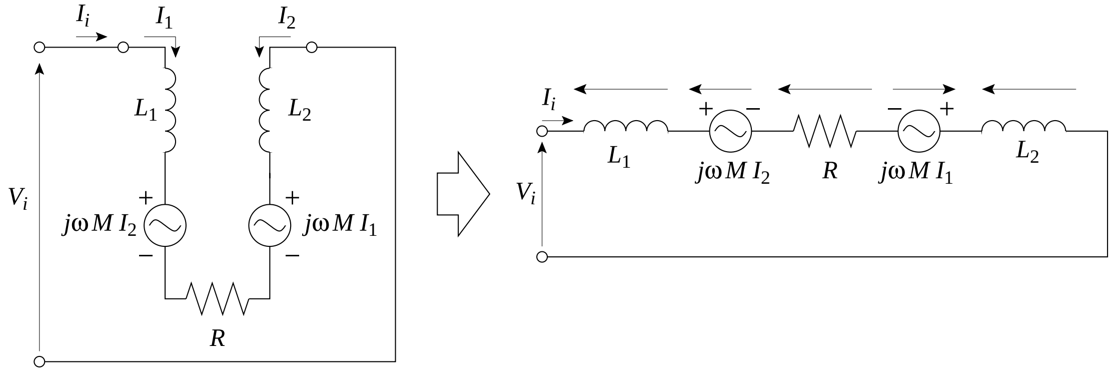


図 (a-2)

(b) 図 (a) の場合に対して，変成器の極性が減極性から加極性に変わっただけであるので，前問の解で，$M \to -M$ の置き換えをすることで，解が得られる．

$$Z_i = \frac{V_i}{I_i} = R + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)$$

(c) 図 (a) の回路と抵抗の置かれている場所が変わっているが，(a) の別解の等価回路で，コイル，電源，抵抗は直列に接続されているので，順番を入れ換えても外部から見たインピーダンスは変化しない．したがって，インピーダンスは (a) の場合と同じであり，以下のように求まる．

$$Z_i = \frac{V_i}{I_i} = R + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)$$

(別解)

この回路のインピーダンスは T 形等価回路を使って求めることもできる．このときの等価回路は図 (c-1) のように表され，単に，抵抗とコイルの直列回路になるので，インピーダンスは

$$\begin{aligned} Z_i &= j\omega(L_1 - M) + R + j\omega(L_2 - M) \\ &= R + j\omega(L_1 + L_2 - 2M) \end{aligned}$$

と求まる．

ところで，このことは図 (a) の回路と図 (c) の回路が等価であることを示しているので，教科書の演習 7.3 のような場合にも，コンデンサの位置を動かして問題ないことがわかる．

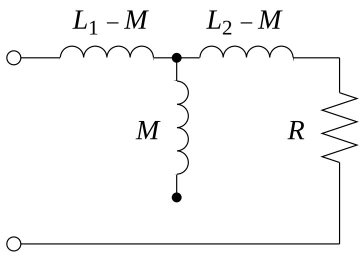


図 (c-1)

(d) 図 (a-1) のように電流，電圧を考えると，変成器の基本式およびオームの法則より

$$\begin{aligned} &V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 = j\omega(L_1 + M)I_i \\ &V_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 = j\omega(M + L_2)I_i \\ &V_R = RI_i \\ &V_i = V_1 + V_R + V_2 \end{aligned}$$

ここで，$I_i = I_1 = I_2$ であることを利用している．また，仮定している電圧降下の向き (矢印の向き) に注意すること．見かけの矢印の向きではなく，経路を順番にたどり経路に沿った矢印の向きを考える．

与えられた関係式から，V_i を I_i で表現すると，

$$
\begin{aligned}
V_i &= j\omega(L_1+M)I_i + RI_i + j\omega(M+L_2)I_i \\
&= \{R + j\omega(L_1+L_2+2M)\}I_i
\end{aligned}
$$

したがって，回路の入力インピーダンスは以下のように求まる．

$$
Z_i = \frac{V_i}{I_i} = R + j\omega(L_1+L_2+2M)
$$

これは，図 (b) の場合の結果と同じであることがわかる．見かけの違いにだまされなければこのことはすぐにわかるはずである．

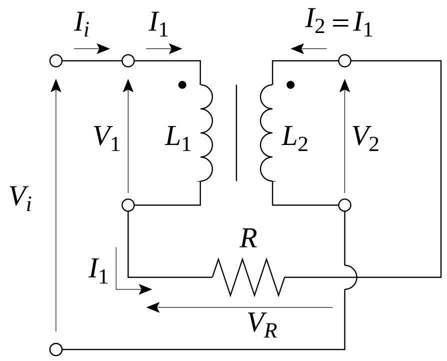


図 (d-1)

(別解)

制御電圧源を使った等価回路，あるいは回路を少し書き直した後に T 形等価回路を使った等価回路を用いて解くこともできるが，(a) や (c) の解法と M の符号を除いてほぼ同じになるので省略する．

(e) 図 (e-1) のように電流，電圧を考えると，変成器の基本式およびオームの法則，キルヒホッフの電流則，キルヒホッフの電圧則より以下の関係式をえる．

$$
\begin{aligned}
&V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \\
&V_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 \\
&V_R = R(I_1 + I_2) \\
&V_2 + V_R = 0 \\
&V_i = V_1 + V_R = V_1 - V_2
\end{aligned}
$$

第 4 式に第 2 式，第 3 式を代入すると

$$
\begin{aligned}
&j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 + R(I_1 + I_2) = 0 \\
&\quad \rightarrow \quad I_2 = -\frac{R + j\omega M}{R + j\omega L_2} I_1
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
V_i &= V_1 - V_2 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 - (j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2) \\
&= j\omega(L_1 - M)I_1 - j\omega(L_2 - M)I_2 \\
&= j\omega(L_1 - M)I_1 + j\omega(L_2 - M)\frac{R + j\omega M}{R + j\omega L_2}I_1 \\
&= j\omega(L_1 - M) + \frac{j\omega(L_2 - M)(R + j\omega M)(R - j\omega L_2)}{R^2 + \omega^2 L_2^2} \\
&= j\omega(L_1 - M) + \frac{j\omega(L_2 - M)(R + j\omega M)(R - j\omega L_2)}{R^2 + \omega^2 L_2^2} \\
&= \frac{\omega^2 R(L_2 - M)^2}{R^2 + \omega^2 L_2^2} + j\omega\left\{L_1 - M + \frac{(L_2 - M)(R^2 + \omega^2 M L_2)}{R^2 + \omega^2 L_2^2}\right\}
\end{aligned}
$$

(別解)

T 形等価回路を利用して図 (e-2) のように回路を書き換えると，インピーダンスは以下のように求まる．

$$
\begin{aligned}
Z_i &= j\omega(L_1 - M) + \{j\omega(L_2 - M)//(R + j\omega M)\} \\
&= j\omega(L_1 - M) + \frac{j\omega(L_2 - M)(R + j\omega M)}{j\omega(L_2 - M) + (R + j\omega M)} \\
&= j\omega(L_1 - M) + \frac{j\omega(L_2 - M)(R + j\omega M)}{R + j\omega L_2} \\
&= j\omega(L_1 - M) + \frac{j\omega(L_2 - M)(R + j\omega M)(R - j\omega L_2)}{R^2 + \omega^2 L_2^2} \\
&= j\omega(L_1 - M) + \frac{j\omega(L_2 - M)(R + j\omega M)(R - j\omega L_2)}{R^2 + \omega^2 L_2^2} \\
&= \frac{\omega^2 R(L_2 - M)^2}{R^2 + \omega^2 L_2^2} + j\omega\left\{L_1 - M + \frac{(L_2 - M)(R^2 + \omega^2 M L_2)}{R^2 + \omega^2 L_2^2}\right\}
\end{aligned}
$$

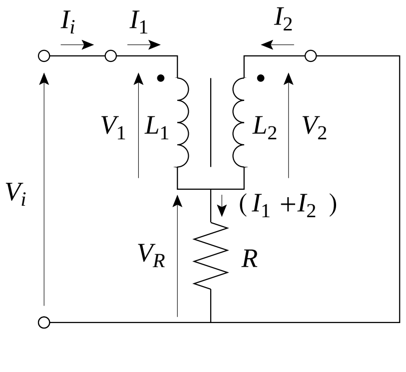


図 (e-1)

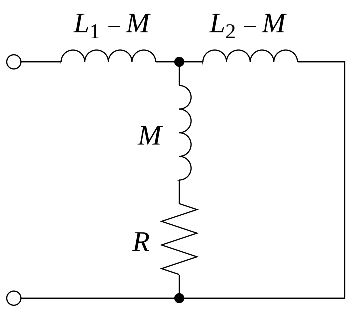


図 (e-2)