電気回路演習 II 第 9 回 (平成 19 年 12 月 14 日 (金))

演習

1. 図 1 の回路が定常状態にあるときコンデンサに蓄えられている電荷 Q_0 とコンデンサに流れている電流 I_0 を求めよ．

2. 図 2 の回路が定常状態にあるときコンデンサに蓄えられている電荷 Q_∞ とコンデンサに流れている電流 I_∞ を求めよ．

3. 図 3 に示す回路において，スイッチ S を閉じて定常状態になった後，時刻 $t = 0$ でスイッチを開く場合を考える (図 1 の状態から図 2 の状態に変化させる)．以下の問に答よ．

   (a) スイッチを開いた後のコンデンサに蓄えられた電荷の時間変化 $q(t)$ と電流の時間変化 $i(t)$ を求めよ．

   (b) 時定数 τ を求めよ．

   (c) 以下では，$R_1 = R_2 = 1\ \Omega$，$R_3 = 2\ \Omega$，$C = 0.25$ F，$E = 12$ V とする．$i(t)$ と $q(t)$ の時間変化をグラフに表せ．

   (d) 以下では，スイッチが開いてから十分時間が経過した後を考え，$t \geq 0$ 以降に電源から供給されたエネルギー W_E を求めよ．

   (e) $t \geq 0$ 以降に各抵抗 R_1 と R_2 で消費されたエネルギーの総和 W_R を求めよ．

   (f) $t = 0$ から $t \to \infty$ の間でのコンデンサに蓄えられたエネルギーの変化量 ΔW_C を求めよ．

   (g) 以上よりエネルギー保存則が成り立つことを確かめよ．

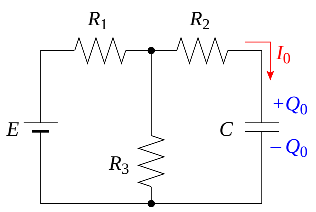


図 1

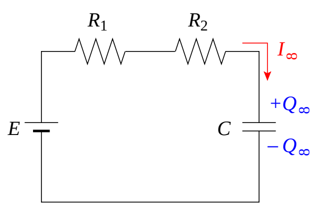


図 2

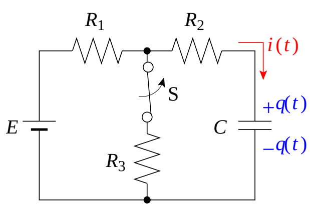


図 3

解答

1. 定常状態ではコンデンサに電流は流れていない．また，コンデンサにかかる電圧は抵抗 R_3 にかかる電圧に等しく

$$V_{C0} = \frac{R_3}{R_1 + R_3} E$$

であるので，Q_0，I_0 は

$$I_0 = 0, \qquad Q_0 = CV_{C0} = \frac{CR_3E}{R_1 + R_3} \quad \boxed{10}$$

2. 定常状態ではコンデンサに電流は流れていないので，電源電圧がそのままコンデンサにかかっている．

$$I_\infty = 0, \qquad Q_\infty = CE \quad \boxed{10}$$

3. (a) スイッチを開いた後の回路方程式はキルヒホッフの電圧則より以下のようになる．

$$(R_1 + R_2)i(t) + \frac{q(t)}{C} = E \quad \boxed{10}$$

コンデンサに流れる電流は，電荷の時間変化として $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ と表されるので，これを代入すると，以下の微分方程式を得る．

$$(R_1 + R_2)\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E \quad \boxed{10}$$

この微分方程式の定常解 $q_s(t)$ は $d/dt \to 0$ として

$$q_s(t) = CE \quad \text{(設問 2 の結果と一致)}$$ $\boxed{5}$

過渡解 $q_t(t)$ は $E \to 0$ として,

$$q_t(t) = Ae^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}} \qquad (A \text{ は積分定数})$$ $\boxed{10}$

以上より

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = CE + Ae^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}}$$

未知の定数 A を決めるために $t = 0$ での初期条件を考える．コンデンサに蓄えられている電荷は瞬時には変化しない (無限大電流は流れない) ので，$q(0)$ は設問 1 で求めた電荷量に等しい

$$q(0) = CE + A = Q_0 \qquad \to \qquad A = Q_0 - CE = -\frac{CR_1E}{R_1 + R_3}$$

よって，電荷の時間変化は

$$q(t) = CE\left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_3}e^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}}\right)$$ $\boxed{10}$

電流の時間変化は，q(t) を時間 t で微分して

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\frac{CER_1}{R_1 + R_3}\left(-\frac{1}{C(R_1 + R_2)}\right)e^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}} = \frac{ER_1}{(R_1 + R_2)(R_1 + R_3)}e^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}}$$ $\boxed{5}$

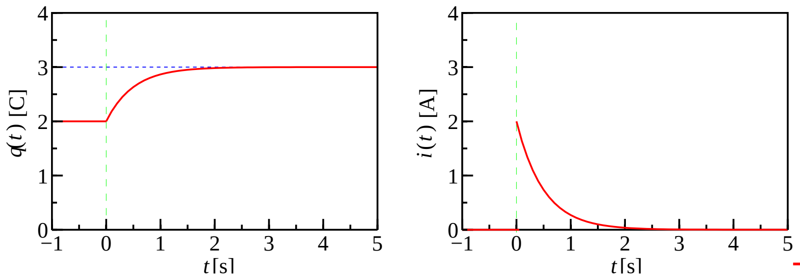
(b) 時定数 τ は，過渡解の振幅が $1/e$ になるまでの時間なので

$$e^{-\frac{\tau}{C(R_1+R_2)}} = e^{-1} \qquad \to \qquad \tau = C(R_1 + R_2)$$ $\boxed{5}$

(c) 与えられた数値を代入すると電荷と電流の時間変化は以下のように求まる．

$$q(t) = 3 - e^{-2t}\ [\mathrm{C}], \qquad i(t) = 2e^{-2t}\ [\mathrm{A}]$$

これを図に表すと下図のようになる．



$\boxed{10}$

電荷は $t = 0$ で Q_0，$t \to \infty$ で Q_∞ になっていることがわかる．一方，電流は $t \to \infty$ では I_∞ と一致するが，$t = 0$ では不連続に変化することがわかる．

(d) 電源から供給されるエネルギーは

$$W_E = \int_0^\infty Ei(t)dt = \int_0^\infty 24e^{-2t}dt = \left[24 \cdot \frac{e^{-2t}}{-2}\right]_0^\infty = \left[-12e^{-2t}\right]_0^\infty = 0 - (-12) = 12\ \mathrm{J}$$ $\boxed{5}$

(e) 抵抗 R_1 と R_2 で消費されるエネルギーは

$$W_R = \int_0^\infty (R_1 + R_2)i(t)^2dt = \int_0^\infty 8e^{-4t}dt = \left[8 \cdot \frac{e^{-4t}}{-4}\right]_0^\infty = 0 - (-2) = 2\ \mathrm{J}$$ $\boxed{5}$

(f) コンデンサに蓄えられているエネルギーの変化量 ΔW_C は

$$\Delta W_C = \frac{Q_\infty^2}{2C} - \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{3^2}{2 \cdot 0.25} - \frac{2^2}{2 \cdot 0.25} = 18 - 8 = 10\ \mathrm{J}$$ $\boxed{5}$

(g) 以上より，$W_E = W_R + \Delta W_C$ となり，エネルギー保存則が成り立つことがわかる．(電源から供給されたエネルギー (12 J) のうち，抵抗で 2 J が消費され，残り (10 J) がコンデンサに蓄えられた) $\boxed{0}$

小テスト

1. 図 1 の回路が定常状態にあるときコイル L に流れている電流 I_0 を求めよ．
2. 図 2 の回路が定常状態にあるときコイル L に流れている電流 I_∞ を求めよ．
3. 図 3 に示す回路において，スイッチ S を閉じて定常状態になった後，時刻 $t = 0$ でスイッチを開く場合を考える (図 1 の状態から図 2 の状態に変化させる)．以下の問に答よ．ただし，$R_1 = 2\ \Omega$，$R_2 = 2\ \Omega$，$R_3 = 1\ \Omega$，$L = 8$ H，$E = 8$ V とする．
   (a) スイッチを開いた後のコイルに流れる電流の時間変化 $i(t)$ を求め，グラフに表せ．
   (b) 時定数 τ を求めよ．

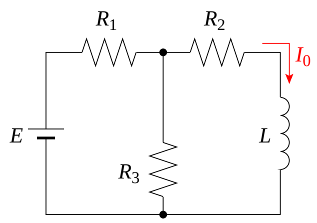


図 1

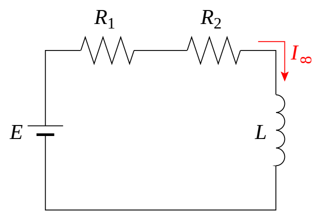


図 2

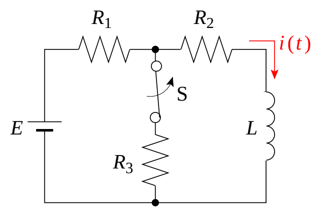


図 3

解答

1. 定常状態ではコイルの抵抗は 0 と考えられるので

$$I_0 = \frac{E}{R_1 + (R_2//R_3)} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_3 E}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \quad \boxed{10}$$

2. 定常状態ではコイルの抵抗は 0 と考えられるので

$$I_\infty = \frac{E}{R_1 + R_2} \quad \boxed{10}$$

3. (a) スイッチを開いた後の回路方程式はキルヒホッフの電圧則より以下の微分方程式を得る．

$$L\frac{di(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i(t) = E \quad \boxed{10}$$

この微分方程式の定常解 $i_s(t)$ は $d/dt \to 0$ として

$$i_s(t) = \frac{E}{R_1 + R_2} \quad \text{(設問 2 の結果と一致)} \quad \boxed{10}$$

過渡解 $i_t(t)$ は $E \to 0$ として，

$$i_t(t) = Ae^{-\frac{(R_1+R_2)}{L}t} \quad (A \text{ は積分定数}) \quad \boxed{20}$$

以上より

$$i(t) = i_s(t) + i_t(t) = \frac{E}{R_1 + R_2} + Ae^{-\frac{(R_1+R_2)}{L}t} = 2 + Ae^{-\frac{t}{2}} \quad \boxed{10}$$

未知の定数 A を決めるために $t = 0$ での初期条件を考える．コイルに流れる電流は瞬時に (不連続に) は変化しないので，設問 1 で求めた電流に等しい．したがって

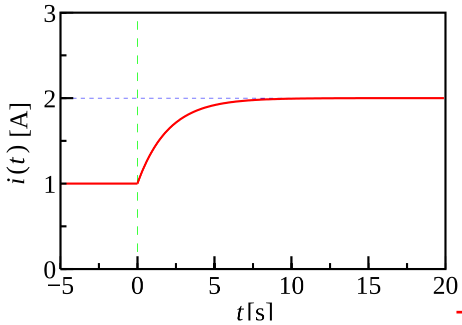
$$I_0 = \frac{1 \cdot 8}{4 + 2 + 2} = 1 \text{ A}$$

$$i(0) = 2 + A = 1 \quad \to \quad A = 1 - 2 = -1$$

よって，電流の時間変化は

$$i(t) = 2 - e^{-\frac{t}{2}} \text{ [A]} \quad \boxed{10}$$

電流の時間変化は下図のようになる．



10

電流は $t = 0$ で I_0，$t \to \infty$ で I_∞ と一致することが確認できる．

(b) 時定数 τ は，過渡解の振幅が $1/e$ になるまでの時間なので

$$e^{-\frac{(R_1+R_2)}{L}\tau} = e^{-1} \qquad \to \qquad \tau = \frac{L}{R_1+R_2} = \frac{8}{2+2} = 2\ \mathrm{s}$$ 10