電気回路演習 II 第 8 回 (平成 19 年 12 月 6 日 (木))

演習

図に示す回路に対して以下の問に答よ．ここで，$R_1 = 20\ \Omega$，$C_1 = \frac{1}{1000\pi}$ F，$V = 100$ V，$f = 50$ Hz とする．

1. 端子 1-1′ より左側をテブナン等価回路で表した回路を書き，内部インピーダンス Z_0，開放電圧 V_f を求めよ．

2. 負荷インピーダンスが $Z_L = x(2+j)$ [Ω] のように与えられる場合を考える．ただし，x は正の実数とする．

   (a) 負荷に流れる電流 $I_L(x)$，負荷にかかる電圧 $V_L(x)$，負荷での実消費電力 $P(x)$ を x の関数として求めよ．ただし，$I_L(x)$ と $V_L(x)$ に関しては分母を実数化しなくても良い．

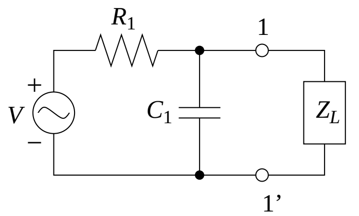
   (b) x を変化させ実消費電力を最大にしたい．$f(x) = 1/P(x)$ として，$f(x)$ を x で微分し，$f(x)$ の最小値を求めることで，x の最適値 x_{opt} を求め，そのときの実消費電力 $P_{\max}$ を求めよ．

3. 負荷インピーダンスが $Z_L = R_L + jX_L$ [Ω] のように与えられる場合を考える．ここで R_L，X_L は実数である．

   (a) 最大電力伝送定理より，負荷 Z_L での実消費電力を最大にする R_L，X_L の値 $R_{L,opt}$，$X_{L,opt}$ を求めよ．

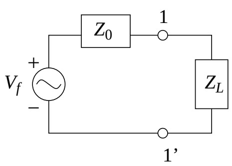
   (b) 3(a) の回路を抵抗 R，コイル L，コンデンサ C を使って表せ．ただし，用いる素子数はなるべく少なくすること．

   (c) 実消費電力の最大値 $P_{\max}$ を求めよ．



解答

1. 端子 1-1′ より左をテブナン等価回路で表すと．



$$
\begin{aligned}
Z_0 &= R_0 + jX_0 = \frac{\frac{R_1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{R_1}{1 + j\omega C_1 R_1} = \frac{20}{1+j2} = \frac{20(1-j2)}{1^2+2^2} = 4(1-j2)\ \Omega \quad \boxed{10} \\
V_f &= \frac{\frac{1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} V = \frac{V}{1 + j\omega C_1 R_1} = \frac{100}{1+j2} = 20(1-j2)\ \mathrm{V} \quad \boxed{10}
\end{aligned}
$$

2. (a)

$$
\begin{aligned}
I_L(x) &= \frac{V_f}{Z_L + Z_0} = \frac{20(1-j2)}{(2x+4) + j(x-8)}\ \mathrm{A} \quad \boxed{10} \\
V_L(x) &= \frac{Z_L V_f}{Z_L + Z_0} = \frac{x(2+j)\cdot 20(1-j2)}{(2x+4)+j(x-8)} = \frac{20x(2+j)(1-j2)}{(2x+4)+j(x-8)}\ \mathrm{V} \quad \boxed{10} \\
P(x) &= \mathrm{Re}\left\{V_L(x)^* I_L(x)\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{20^2 \cdot x(2+j)\cdot 5}{(2x+4)^2 + (x-8)^2}\right\} = \frac{4000x}{5x^2+80} = \frac{800x}{x^2+16}\ \mathrm{W} \quad \boxed{10}
\end{aligned}
$$

(b) 消費電力の逆数を $f(x)$ と置くと

$$f(x) = \frac{1}{P(x)} = \frac{1}{800}\left(x + \frac{16}{x}\right)$$

これを x で微分して 0 となる x で $f(x)$ は極値を取る

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{800}\left(1 - \frac{16}{x^2}\right) = 0 \qquad \rightarrow \qquad x = 4 \quad (x \text{ は正の実数})$$

$df(x)/dx$ は $0 < x < 4$ で負であり，$x > 4$ で正であるので，$x = 4$ で極小かつ最小になる．したがって，消費電力を最大にする x の値は

$$x_{opt} = 4 \quad \boxed{10}$$

である．またこのときの消費電力は

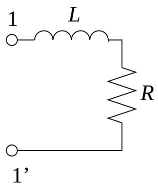
$$P(x = 4) = \frac{800 \cdot 4}{4^2 + 16} = 100 \text{ W} \quad \boxed{10}$$

である．

3. (a) 最大電力伝送定理より共役整合条件を考えると

$$Z_{L,opt} = Z_0^* = 4 + j8 \ \Omega \qquad \rightarrow \qquad R_{L,opt} = 4 \ \Omega, \quad X_{L,opt} = 8 \ \Omega \ \boxed{10}$$

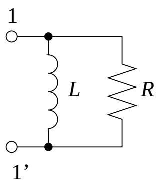
(b) R と L の直列接続で考えると以下のような回路を得る



$$Z_L = R + j\omega L = Z_0^*$$

$$R + j100\pi \cdot L = 4 + j8 \qquad \rightarrow \qquad R = 4 \ \Omega, \quad L = \frac{2}{25\pi} \text{ H} \quad \boxed{10}$$

R と L の並列接続で考えると以下のような回路を得る



$$Y_L = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} = Y_0^*$$

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{4 + j8} = \frac{1 - j2}{20} \qquad \rightarrow \qquad R = 20 \ \Omega, \quad L = \frac{1}{10\pi} \text{ H}$$

(c) 最大となる消費電力は

$$P_{\max} = \frac{|V_f|^2}{4R_0} = \frac{20^2(1^2 + 2^2)}{4 \cdot 4} = 125 \text{ W} \quad \boxed{10}$$

小テスト

図に示す回路に対して以下の問に答よ．ここで，$R_1 = 3\ \Omega$，$L_1 = \frac{1}{25\pi}$ H，$I = 2$ A，$f = 50$ Hz とする．

1. 端子 1-1′ より左側をテブナン等価回路で表した回路を書き，内部インピーダンス Z_0，開放電圧 V_f を求めよ．

2. 負荷インピーダンスが $Z_L = R_L$ [Ω] のように実数で与えられる場合を考える．

   (a) 負荷に流れる電流 $I_L(R_L)$，負荷にかかる電圧 $V_L(R_L)$，負荷での実消費電力 $P(R_L)$ を R_L の関数として求めよ．ただし，$I_L(R_L)$ と $V_L(R_L)$ に関しては分母を実数化しなくても良い．

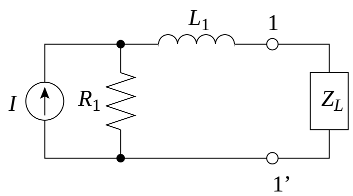
   (b) R_L を変化させ実消費電力を最大にしたい．$f(R_L) = 1/P(R_L)$ として，$f(R_L)$ を R_L で微分し，$f(R_L)$ の最小値を求めることで，R_L の最適値 $R_{L,opt}$ を求め，そのときの実消費電力 $P_{\max}$ を求めよ．

3. 負荷インピーダンスが $Z_L = R_L + jX_L$ [Ω] のように与えられる場合を考える．ここで R_L，X_L は実数である．

   (a) 最大電力伝送定理より，負荷 Z_L での実消費電力を最大にする R_L，X_L の値 $R_{L,opt}$，$X_{L,opt}$ を求めよ．

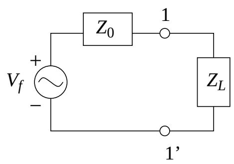
   (b) 3(a) の回路を抵抗 R，コイル L，コンデンサ C を使って表せ．ただし，用いる素子数はなるべく少なくすること．

   (c) 実消費電力の最大値 $P_{\max}$ を求めよ．



解答

1. 端子 1-1′ より左をテブナン等価回路で表すと．



$$
\begin{aligned}
Z_0 &= R_0 + jX_0 = R_1 + j\omega L_1 = 3 + j4\ \Omega \ \boxed{10} \\
V_f &= R_1 I = 6\ \text{V} \ \boxed{10}
\end{aligned}
$$

2. (a) 負荷が R_L であるとき

$$
\begin{aligned}
I_L(R_L) &= \frac{V_f}{R_L + Z_0} = \frac{6}{R_L + 3 + j4}\ \text{A} \ \boxed{10} \\
V_L(R_L) &= \frac{R_L V_f}{R_L + Z_0} = \frac{6R_L}{R_L + 3 + j4}\ \text{V} \ \boxed{10} \\
P(R_L) &= \text{Re}\{V_L(R_L)^* I_L(R_L)\} = \text{Re}\left\{\frac{6R_L}{R_L + 3 - j4} \cdot \frac{6}{R_L + 3 + j4}\right\} = \frac{36R_L}{(R_L+3)^2 + 16}\ \text{W} \ \boxed{10}
\end{aligned}
$$

   (b) 消費電力の逆数を $f(R_L)$ と置くと

$$
f(R_L) = \frac{1}{P(R_L)} = \frac{(R_L+3)^2 + 16}{36R_L} = \frac{1}{36}\left(R_L + 6 + \frac{25}{R_L}\right)
$$

これを R_L で微分して 0 となる R_L で $f(R_L)$ は極値を取る

$$\frac{df(R_L)}{dR_L} = \frac{1}{36}\left(1 - \frac{25}{R_L^2}\right) = 0 \qquad \rightarrow \qquad R_L = 5 \quad (\text{抵抗の値は正})$$

$df(R_L)/dR_L$ は $0 < R_L < 5$ で負であり，$R_L > 5$ で正であるので，$R_L = 5$ で極小かつ最小になる．したがって，消費電力を最大にする R_L の値は

$$R_{L,opt} = 5 \ \Omega \ \boxed{10}$$

である．またこのときの消費電力は

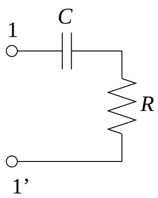
$$P(R_L = 5) = \frac{36 \cdot 5}{(5+3)^2 + 16} = \frac{9}{4} \ \mathrm{W} \ \boxed{10}$$

である．

3. (a) 最大電力伝送定理より共役整合条件を考えると

$$Z_{L,opt} = Z_0^* = 3 - j4 \ \Omega \qquad \rightarrow \qquad R_{L,opt} = 3 \ \Omega, \quad X_{L,opt} = -4 \ \Omega \ \boxed{10}$$

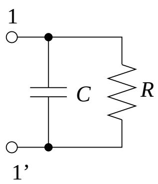
(b) R と C の直列接続で考えると以下のような回路を得る



$$Z_L = R + \frac{1}{j\omega C} = Z_0^*$$

$$R - j\frac{1}{100\pi \cdot C} = 3 - j4 \qquad \rightarrow \qquad R = 3 \ \Omega, \quad C = \frac{1}{400\pi} \ \mathrm{F} \ \boxed{10}$$

R と C の並列接続で考えると以下のような回路を得る



$$Y_L = \frac{1}{R} + j\omega C = Y_0^*$$

$$\frac{1}{R} + j100\pi \cdot C = \frac{1}{3 - j4} = \frac{3 + j4}{25} \qquad \rightarrow \qquad R = \frac{25}{3} \ \Omega, \quad C = \frac{1}{625\pi} \ \mathrm{F}$$

(c) 最大となる実消費電力は

$$P_{\max} = \frac{|V_f|^2}{4R_0} = \frac{36}{12} = 3 \ \mathrm{W} \ \boxed{10}$$