電気回路演習 II 第 6 回 (平成 19 年 11 月 16 日 (金))

演習

1. 図 1 に示す回路のコイル L に流れる電流を求めよ．角周波数は ω とする．

2. 図 2 に示す回路において，Z_1 と Z_2 が R_0 に関して互いに逆回路の関係にあるとき，抵抗 R_1 に流れる電流が周波数によらず一定であることを確かめよ．

3. 図 3 に示す回路に関して以下の問に答よ．

   (a) 直列 $\Longleftrightarrow$ 並列変換を行うことで R_0 に関する逆回路を求めよ．

   (b) 端子間に電圧源を仮定し，独立な閉回路内および回路の外側に節点を置き，これらの節点間を結ぶ線が各素子を横切るように線を引くことで，R_0 に関する逆回路を求めよ．

   (c) $R_0 = 1\ \Omega$，$R_1 = 2\ \Omega$，$R_2 = 5\ \Omega$，$R_3 = 1\ \Omega$，$L = \frac{1}{40\pi}$ H，$C = \frac{1}{200\pi}$ F，$f = 50$ Hz の場合に対して，図 3 の回路のインピーダンス Z_i と逆回路のインピーダンス Z_{ir} を求め，$Z_i \cdot Z_{ir} = R_0^2$ となることを確かめよ．

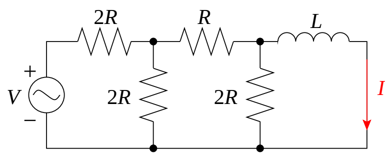


図 1

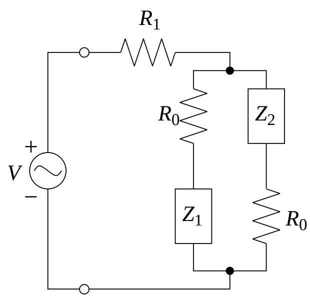


図 2

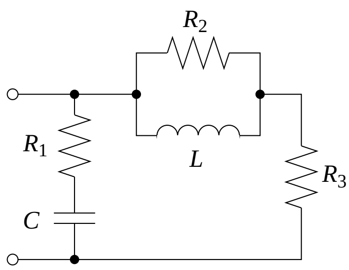
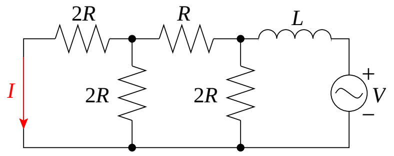


図 3

解答

1. 相反定理を利用して，問題の回路を直接解く代わりに，下図の回路の電流 I を求める．



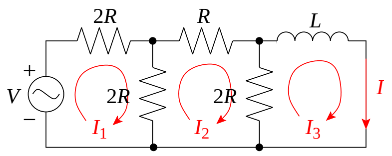
左側の抵抗のみの部分の合成抵抗は R と容易に求まるので，電源から回路に流れる電流 I' は

$$I' = \frac{V}{R + j\omega L} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} V$$

と求まる．この電流は，最初の分岐で 1/2 ずつに，次の分岐でも 1/2 ずつに分かれるので，求める電流は以下のように求まる．

$$I = \frac{I'}{4} = \frac{(R - j\omega L)V}{4(R^2 + \omega^2 L^2)}$$

(参考) 図 1 の回路を閉路方程式を用いて解くこともできる．下図のように閉路電流を設定すると



閉路方程式は

$$\begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4R & -2R & 0 \\ -2R & 5R & -2R \\ 0 & -2R & 2R + j\omega L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

であり，行列式の値は

$$\Delta = 4R \cdot 5R \cdot (2R + j\omega L) - 4R \cdot (-2R)^2 - (-2R)^2(2R + j\omega L) = 16R^2(R + j\omega L)$$

である．電流 $I = I_3$ は

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 4R & -2R & V \\ -2R & 5R & 0 \\ 0 & -2R & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(-2R)^2 V}{16R^2(R + j\omega L)} = \frac{V}{4(R + j\omega L} = \frac{(R - j\omega L)V}{4(R^2 + \omega^2 L^2)}$$

と求まり，相反定理を使って解いた結果と一致していることが確認できる．

2. Z_1 と Z_2 は逆回路の関係にあるので，以下のように α を定義する．

$$Z_1 \cdot Z_2 = R_0^2 \qquad \rightarrow \qquad \frac{Z_1}{R_0} = \frac{R_0}{Z_2} = \alpha$$

電源から右側を見た合成インピーダンス Z は

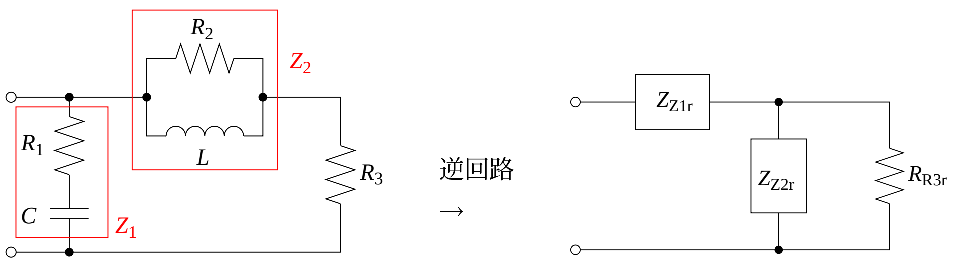
$$\begin{aligned} Z &= R_1 + (R_0 + Z_1)//(Z_2 + R_0) = R_1 + \frac{(R_0 + Z_1)(Z_2 + R_0)}{(R_0 + Z_1) + (Z_2 + R_0)} = R_1 + \frac{R_0^2\left(1 + \frac{Z_1}{R_0}\right) \cdot \left(\frac{Z_2}{R_0} + 1\right)}{R_0\left(\frac{Z_1}{R_0} + 2 + \frac{Z_2}{R_0}\right)} \\ &= R_1 + \frac{R_0(1 + \alpha)\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)}{\left(\alpha + 2 + \frac{1}{\alpha}\right)} = R_1 + R_0 \frac{(1 + \alpha)^2/\alpha}{(1 + \alpha)^2/\alpha} = R_1 + R_0 \end{aligned}$$

抵抗 R_1 に流れる電流は

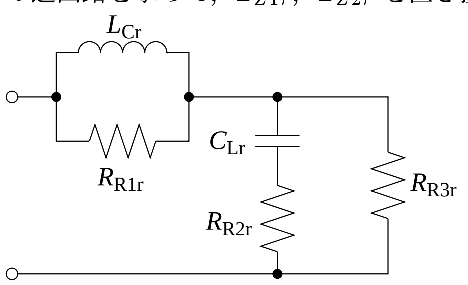
$$I = \frac{V}{R_0 + R_1}$$

と求まり，電源の周波数に依存しないことがわかる．

3. (a) 図 3 の回路を下図左のように表し，直列 $\Longleftrightarrow$ 並列変換を行い，逆回路を求めると下図右のようになる．



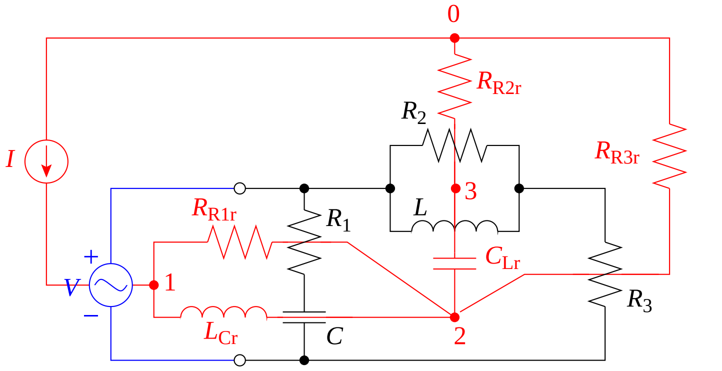
ここに Z_{Z1r}，Z_{Z2r}，R_{R3r} はそれぞれ Z_1，Z_2，R_3 に対する逆回路である．最後に，Z_1，Z_2 の逆回路を求めて，Z_{Z1r}，Z_{Z2r} を置き換えると，図 3 の逆回路として以下の回路を得る．



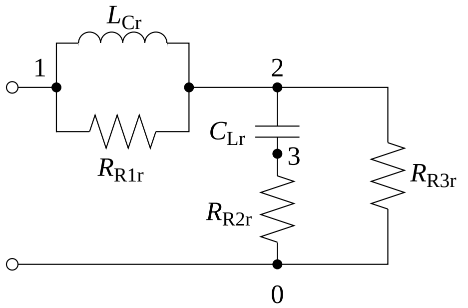
ここに，各素子の値は以下の式で与えられる．

$$L_{Cr} = CR_0^2, \qquad C_{Lr} = \frac{L}{R_0^2}, \qquad R_{R1r} = \frac{R_0^2}{R_1}, \qquad R_{R2r} = \frac{R_0^2}{R_2}, \qquad R_{R3r} = \frac{R_0^2}{R_3}$$

(b) 便宜的に端子間に電圧源を仮定し，各閉路内に節点を設けて，それぞれの素子を通るように節点間を結ぶと下図のようになる．



上図を整理して，電流源を取り除くと以下の逆回路が得られる．



ここに，各素子の値は以下の式で与えられる．

$$L_{Cr} = CR_0^2, \qquad C_{Lr} = \frac{L}{R_0^2}, \qquad R_{R1r} = \frac{R_0^2}{R_1}, \qquad R_{R2r} = \frac{R_0^2}{R_2}, \qquad R_{R3r} = \frac{R_0^2}{R_3}$$

(c) まず，設問 (a) の図の Z_1，Z_2 を求めると

$$\begin{aligned} Z_1 &= R_1 + \frac{1}{j\omega C} = 2 - j2\ \Omega \\ Z_2 &= R_2//(j\omega L) = \frac{5 \cdot j\frac{5}{2}}{5 + j\frac{5}{2}} = \frac{j5}{2+j} = \frac{j5(2-j)}{2^2+1^2} = 1 + j2\ \Omega \end{aligned}$$

と求まるので，合成インピーダンスは

$$Z_i = Z_1//(R_3 + Z_2) = (2-j2)//(2+j2) = \frac{(2-j2)(2+j2)}{2-j2+2+j2} = \frac{2^2+2^2}{4} = 2\ \Omega$$

逆回路の各素子の値は

$$L_{Cr} = \frac{1}{200\pi}\ \mathrm{H}, \qquad C_{Lr} = \frac{1}{40\pi}\ \mathrm{F}, \qquad R_{R1r} = 0.5\ \Omega, \qquad R_{R2r} = 0.2\ \Omega, \qquad R_{R3r} = 1\ \Omega$$

であるので，逆回路の合成インピーダンスは

$$\begin{aligned} Z_{Z1r} &= R_{R1r}//(j\omega L_{Cr}) = \frac{0.5 \cdot j0.5}{0.5 + j0.5} = \frac{j}{2(1+j)} = \frac{j(1-j)}{2(1^2+1^2)} = \frac{1+j}{4}\ \Omega \\ Z_{Z2r} &= R_{R2r} + \frac{1}{j\omega C_{Lr}} = 0.2 - j\frac{2}{5} = 0.2 - j0.4\ \Omega \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} Z_{ir} &= Z_{Z1r} + (Z_{Z2r}//R_{R3r}) = \frac{1+j}{4} + \frac{(0.2-j0.4)\cdot 1}{0.2-j0.4+1} = \frac{1+j}{4} + \frac{1-j2}{6-j2} \\ &= \frac{1+j}{4} + \frac{(1-j2)(3+j)}{2(3^2+1^2)} = \frac{1+j}{4} + \frac{5-j5}{20} = \frac{1+j}{4} + \frac{1-j}{4} = \frac{1}{2}\ \Omega \end{aligned}$$

したがって

$$Z_i \cdot Z_{ir} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 = R_0^2$$

小テスト

1. 図 1 に示す回路において，Z_1 と Z_2 が R_0 に関して互いに逆回路の関係にあるとき，抵抗 R_1 に流れる電流が周波数によらず一定であることを確かめよ．

2. 図 2 に示す回路に関して以下の問に答よ．

   (a) 直列 $\Longleftrightarrow$ 並列変換を行うことで R_0 に関する逆回路を求めよ．

   (b) 端子間に電圧源を仮定し，独立な閉回路内および回路の外側に節点を置き，これらの節点間を結ぶ線が各素子を横切るように線を引くことで，R_0 に関する逆回路を求めよ．

   (c) $R_0 = 1\,\Omega$，$R_1 = 2\,\Omega$，$R_2 = 2\,\Omega$，$L_1 = \frac{1}{100\pi}$ H，$C_1 = \frac{1}{200\pi}$ F，$C_2 = \frac{1}{400\pi}$ F，$f = 50$ Hz の場合に対して，図 2 の回路のインピーダンス Z_i と逆回路のインピーダンス Z_ir を求め，$Z_i \cdot Z_{ir} = R_0^2$ となることを確かめよ．

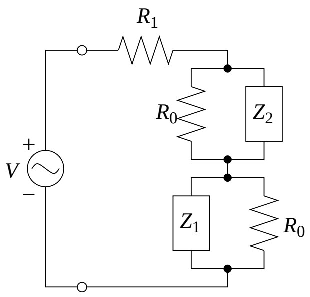


図 1

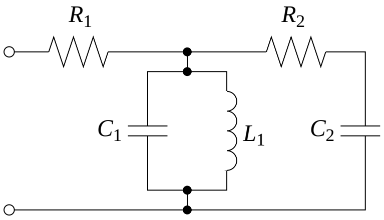


図 2

解答

1. Z_1 と Z_2 は逆回路の関係にあるので，以下のように α を定義する．

$$Z_1 \cdot Z_2 = R_0^2 \qquad \rightarrow \qquad \frac{Z_1}{R_0} = \frac{R_0}{Z_2} = \alpha$$

電源から右側を見た合成インピーダンス Z は

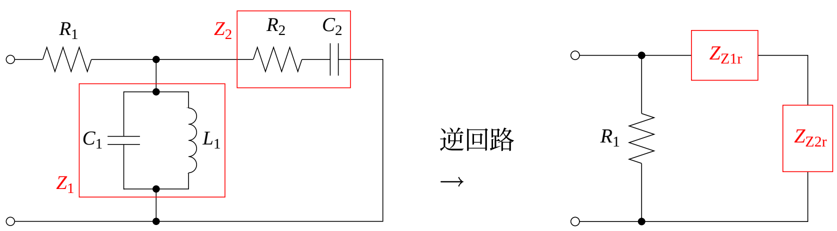
$$\begin{aligned} Z &= R_1 + (R_0//Z_1) + (R_0//Z_2) = R_1 + \frac{R_0 Z_1}{R_0 + Z_1} + \frac{R_0 Z_2}{R_0 + Z_2} = R_1 + \frac{Z_1}{1 + \frac{Z_1}{R_0}} + \frac{R_0}{\frac{R_0}{Z_2} + 1} \\ &= R_1 + \frac{Z_1}{1+\alpha} + \frac{R_0}{\alpha + 1} = R_1 + \frac{R_0 + Z_1}{1+\alpha} = R_1 + \frac{R_0\left(1 + \frac{Z_1}{R_0}\right)}{1+\alpha} = R_1 + \frac{R_0(1+\alpha)}{1+\alpha} = R_1 + R_0 \end{aligned}$$

抵抗 R_1 に流れる電流は

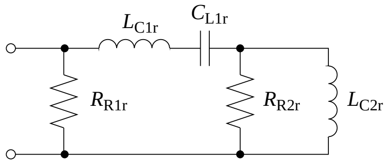
$$I = \frac{V}{R_0 + R_1}$$

と求まり，電源の周波数に依存しないことがわかる．

2. (a) 図 2 の回路を下図左のように表し，直列 $\Longleftrightarrow$ 並列変換を行い，逆回路を求めると下図右のようになる．



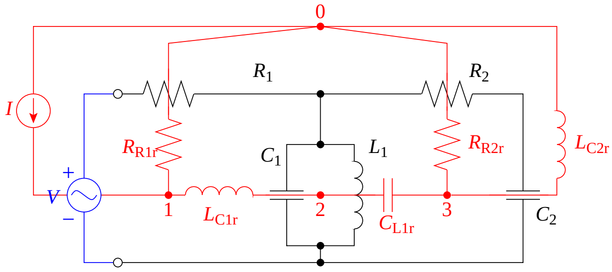
ここに Z_{Z1r}，Z_{Z2r}，R_{R1r} はそれぞれ Z_1，Z_2，R_1 に対する逆回路である．最後に，Z_1，Z_2 の逆回路を求めて，Z_{Z1r}，Z_{Z2r} を置き換えると，図 3 の逆回路として以下の回路を得る．



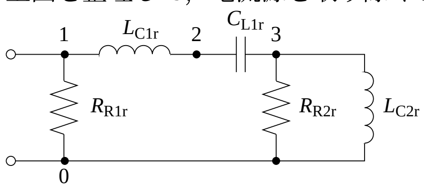
ここに，各素子の値は以下の式で与えられる．

$$L_{C1r} = C_1 R_0^2, \quad L_{C2r} = C_2 R_0^2, \quad C_{L1r} = \frac{L_1}{R_0^2}, \quad R_{R1r} = \frac{R_0^2}{R_1}, \quad R_{R2r} = \frac{R_0^2}{R_2}$$

(b) 便宜的に端子間に電圧源を仮定し，各閉路内に節点を設けて，それぞれの素子を通るように節点間を結ぶと下図のようになる．



上図を整理して，電流源を取り除くと以下の逆回路が得られる．



ここに，各素子の値は以下の式で与えられる．

$$L_{C1r} = C_1 R_0^2, \quad L_{C2r} = C_2 R_0^2, \quad C_{L1r} = \frac{L_1}{R_0^2}, \quad R_{R1r} = \frac{R_0^2}{R_1}, \quad R_{R2r} = \frac{R_0^2}{R_2}$$

(c) まず，設問 (a) の図の Z_1，Z_2 を求めると

$$\begin{aligned} Z_1 &= (j\omega L_1)//\frac{1}{j\omega C_1} = j//(-j2) = \frac{j\cdot(-j2)}{j-j2} = \frac{2}{-j} = j2\ \Omega \\ Z_2 &= R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} = 2 - j4\ \Omega \end{aligned}$$

と求まるので，合成インピーダンスは

$$\begin{aligned} Z_i &= R_1 + Z_1//(Z_2) = 2 + (j2)//(2-j4) = 2 + \frac{j2(2-j4)}{j2+2-j4} = 2 + \frac{8+j4}{2-j2} = 2 + \frac{2(2+j)}{1-j} \\ &= 2 + \frac{2(2+j)(1+j)}{1^2+1^2} = 2 + 1 + j3 = 3(1+j)\ \Omega \end{aligned}$$

逆回路の各素子の値は

$$L_{C1r} = \frac{1}{200\pi}\ \mathrm{H}, \quad L_{C2r} = \frac{1}{400\pi}\ \mathrm{H}, \quad C_{L1r} = \frac{1}{100\pi}\ \mathrm{F}, \quad R_{R1r} = \frac{1}{2}\ \Omega, \quad R_{R2r} = \frac{1}{2}\ \Omega$$

であるので，逆回路の合成インピーダンスは

$$\begin{aligned} Z_{Z1r} &= \frac{1}{j\omega C_{L1r}} + j\omega L_{C1r} = -j + j\frac{1}{2} = -j\frac{1}{2}\ \Omega \\ Z_{Z2r} &= R_{R2r}//(j\omega L_{C2r}) = \frac{1}{2}//j\frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{2}\cdot j\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+j\frac{1}{4}} = \frac{j}{2(2+j)}\ \Omega \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} Z_{ir} &= R_{R1r}//(Z_{Z1r}+Z_{Z2r}) = \frac{1}{2}//\left(-j\frac{1}{2} + \frac{j}{2(2+j)}\right) = \frac{1}{2}//\left(\frac{1-j}{2(2+j)}\right) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1-j}{2(2+j)}}{\frac{1}{2}+\frac{1-j}{2(2+j)}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(1-j)}{(2+j)+(1-j)} = \frac{1-j}{6}\ \Omega \end{aligned}$$

したがって

$$Z_i \cdot Z_{ir} = 3(1+j)\cdot\frac{1-j}{6} = 1 = R_0^2$$