電気回路演習 II 第 5 回 (平成 19 年 11 月 9 日 (金))

演習

1. 図 1 に示す回路に対して以下の問に答よ．

   (a) 図の破線内をノルトン等価回路で置き換えた回路を書け

   (b) (a) の回路の節点方程式を立てるため，節点を〇で表し，節点番号を付けよ．(ただし，図中にすでに示されている節点 0 は変えないこと)

   (c) (a) の回路に対して節点方程式を立て，行列の形で表せ．ただし，角周波数は ω とする．

2. 図 2 に示す回路に対して以下の問に答よ．

   (a) 節点方程式を立てるため，節点を〇で表し，節点番号を付けよ．(ただし，図中にすでに示されている節点 0 は変えないこと)

   (b) 節点方程式を立て，行列の形で表せ．ただし，角周波数は ω とする．

   (c) $R_1 = 1\ \Omega$，$R_2 = 0.5\ \Omega$，$R_3 = 1\ \Omega$，$L_1 = L_2 = \frac{1}{100\pi}$ H，$C_1 = \frac{1}{25\pi}$ F，$C_2 = \frac{1}{100\pi}$ F，$I_1 = 3$ A，$I_2 = 6$ A，周波数 $f = 50$ Hz として，(a) で求めた式に数値を代入した式を示せ．

   (d) (c) で求めた節点行列の行列式の値 Δ を求めよ．

   (e) (c) で求めた方程式を Cramer の公式を用いて解き，節点 0 に対する各節点電位を求めよ．(分母を実数化すること)

   (f) (e) で求めた解を (c) の式に代入し，答が (c) の解として正しいことを確認せよ．

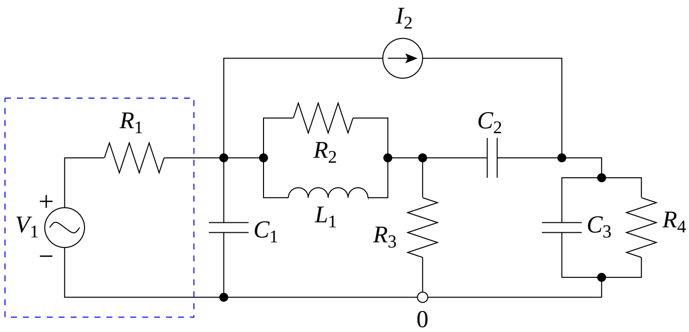


図 1

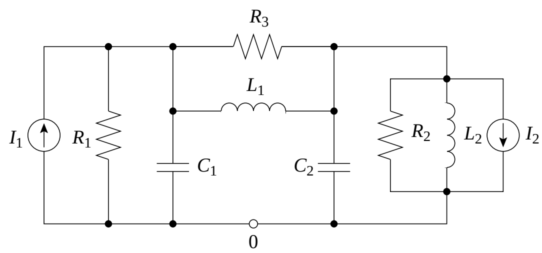
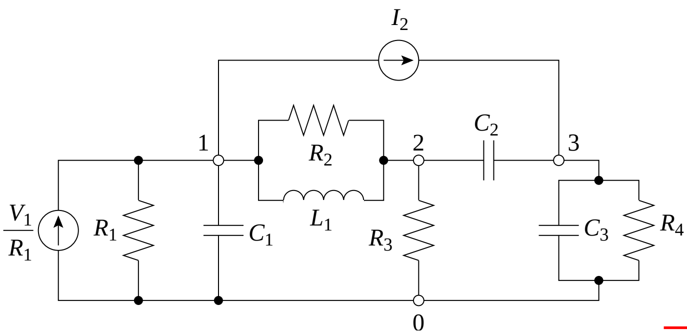


図 2

解答

1. (a) 破線部をノルトン等価回路で置き換えると以下のようになる．



15

   (b) 節点と節点番号を (a) の図に示す．

   (c) 節点方程式は以下のように書ける．

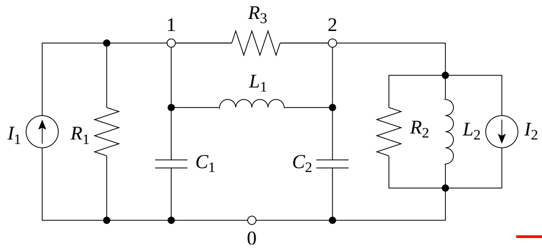
$$\begin{bmatrix} \frac{V_1}{R_1} - I_2 \\ 0 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1} & -\frac{1}{R_2} - \frac{1}{j\omega L_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_2} - \frac{1}{j\omega L_1} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L_1} & -j\omega C_2 \\ 0 & -j\omega C_2 & \frac{1}{R_4} + j\omega C_2 + j\omega C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

20

これを整理すると以下のように書ける．（採点は上の式までで良い）

$$\begin{bmatrix} \frac{V_1}{R_1} - I_2 \\ 0 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + j\left(\omega C_1 - \frac{1}{\omega L_1}\right) & -\frac{1}{R_2} + j\frac{1}{\omega L_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_2} + j\frac{1}{\omega L_1} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + j\left(\omega C_2 - \frac{1}{j\omega L_1}\right) & -j\omega C_2 \\ 0 & -j\omega C_2 & \frac{1}{R_4} + j\omega\left(C_2 + C_3\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

2. (a) 図のように節点と節点番号を設定する．



$\boxed{10}$

(b) 節点方程式は以下のように書ける．

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1} & -\frac{1}{R_3} - \frac{1}{j\omega L_1} \\ -\frac{1}{R_3} - \frac{1}{j\omega L_1} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{j\omega L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad \boxed{20}$$

これを整理すると以下のように書ける．（採点は上の式までで良い）

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + j\left(\omega C_1 - \frac{1}{\omega L_1}\right) & -\frac{1}{R_3} + j\frac{1}{\omega L_1} \\ -\frac{1}{R_3} + j\frac{1}{\omega L_1} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + j\left(\omega C_2 - \frac{1}{\omega L_1} - \frac{1}{\omega L_2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

(c) 与えられている数値を代入すると，以下の式を得る．

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+j3 & -1+j \\ -1+j & 3-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad \boxed{5}$$

(d) 行列式の値は

$$\Delta = (2+j3)(3-j) - (-1+j)^2 = 6 - j2 + j9 + 3 - 1 + j2 + 1 = 9 + j9 = 9(1+j) \quad \boxed{5}$$

(e) Cramer の公式より

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1+j \\ -6 & 3-j \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{9 - j3 - 6 + j6}{9(1+j)} = \frac{3(1+j)}{9(1+j)} = \frac{1}{3}\ \mathrm{V} \quad \boxed{10}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 2+j3 & 3 \\ -1+j & -6 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-12 - j18 + 3 - j3}{9(1+j)} = \frac{-9 - j21}{9(1+j)} = \frac{-(3+j7)(1-j)}{3(1^2+1^2)} \quad \boxed{10} \\ &= \frac{-10 - j4}{6} = \frac{-(5+j2)}{3}\ \mathrm{V} \end{aligned}$$

(f) 求まった答を (c) で求めた式の右辺に代入すると

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \begin{bmatrix} 2+j3 & -1+j \\ -1+j & 3-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-(5+j2)}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} (2+j3) - (5+j2)(-1+j) \\ (-1+j) - (5+j2)(3-j) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 + j3 - (-5 + j5 - j2 - 2) \\ -1 + j - (15 - j5 + j6 + 2) \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 9 \\ -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} = \text{左辺} \quad \boxed{5} \end{aligned}$$

よって，(e) で求めた解は，(c) の方程式の解になっている．

小テスト

図に示す回路に対して以下の問に答よ．

(a) 節点方程式を立てるため，節点を〇で表し，節点番号を付けよ．(ただし，図中にすでに示されている節点 0 は変えないこと)

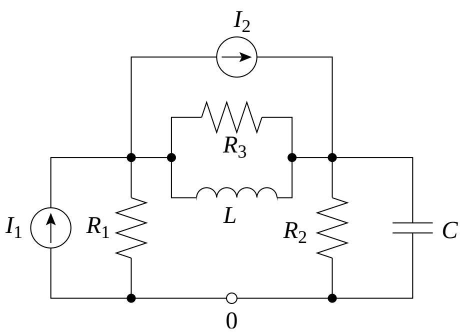
(b) 節点方程式を立て，行列の形で表せ．ただし，角周波数は ω とする．

(c) $R_1 = 1\ \Omega$，$R_2 = \frac{1}{3}\ \Omega$，$R_3 = 1\ \Omega$，$L = \frac{1}{100\pi}$ H，$C = \frac{1}{50\pi}$ F，$I_1 = 6$ A，$I_2 = 3$ A，周波数 $f = 50$ Hz として，(a) で求めた式に数値を代入した式を示せ．

(d) (c) で求めた節点行列の行列式の値 Δ を求めよ．

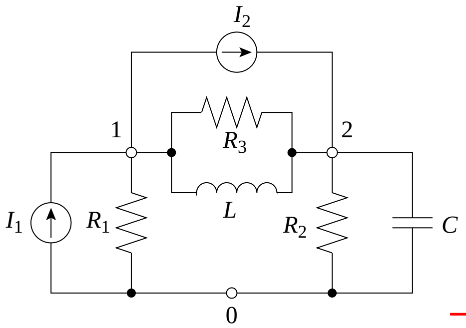
(e) (c) で求めた方程式を Cramer の公式を用いて解き，節点 0 に対する各節点電位を求めよ．(分母を実数化すること)

(f) (e) で求めた解を (c) の式に代入し，答が (c) の解として正しいことを確認せよ．



解答

(a) 図のように節点と節点番号を設定する．



$\boxed{10}$

(b) 閉路方程式は以下のように書ける．

$$\begin{bmatrix} I_1 - I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{j\omega L} & -\frac{1}{R_3} - \frac{1}{j\omega L} \\ -\frac{1}{R_3} - \frac{1}{j\omega L} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad \boxed{40}$$

これを整理すると以下のように書ける．（採点は上の式までで良い）

$$\begin{bmatrix} I_1 - I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} - j\frac{1}{\omega L} & -\frac{1}{R_3} + j\frac{1}{\omega L} \\ -\frac{1}{R_3} + \frac{1}{\omega L} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

(c) 与えられている数値を代入すると，以下の式を得る．

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - j & -1 + j \\ -1 + j & 4 + j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad \boxed{10}$$

(d) 行列式の値は

$$\Delta = (2-j)(4+j) - (-1+j)^2 = 8 + j2 - j4 + 1 - (1 - j2 - 1) = 9 \quad \boxed{10}$$

(e) Cramer の公式より

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1+j \\ 3 & 4+j \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{12 + j3 + 3 - j3}{9} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}\ \mathrm{V} \quad \boxed{10}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2-j & 3 \\ -1+j & 3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{6 - j3 + 3 - j3}{9} = \frac{9 - j6}{9} = \frac{3 - j2}{3}\ \mathrm{V} \quad \boxed{10}$$

(f) 求まった答を (c) で求めた式の右辺に代入すると

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= \begin{bmatrix} 2-j & -1+j \\ -1+j & 4+j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{3-j2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} (2-j)\cdot 5 + (-1+j)(3-j2) \\ (-1+j)\cdot 5 + (4+j)(3-j2) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 10 - j5 - 3 + j2 + j3 + 2 \\ -5 + j5 + 12 - j8 + j3 + 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \text{左辺} \quad \boxed{10}
\end{aligned}$$

よって，(e) で求めた解は，(c) の方程式の解になっている．