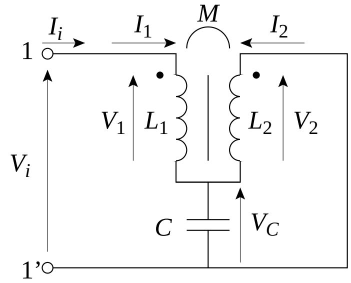
電気回路演習 II 第 2 回 (平成 19 年 10 月 12 日 (金))

演習

図に示す変成器を含む回路に対して，端子 1，1′ から右側を見た入力インピーダンス $Z_i(= V_i/I_i)$ を以下の 2 つの手順でそれぞれ計算し，答が一致することを確認せよ．ここに 角周波数を ω，変成器の相互インダクタンスを M，1 次側，2 次側の自己インダクタンスをそれぞれ L_1，L_2，コンデンサの静電容量を C とし，図のように，1 次側コイルに流れる電流を I_1，2 次側コイルに流れる電流を I_2 とする．

1. (a) 変成器の 1 次側にかかる電圧 V_1 を電流 I_1，I_2 を用いて表せ．
   (b) 変成器の 2 次側にかかる電圧 V_2 を電流 I_1，I_2 を用いて表せ．
   (c) コンデンサにかかる電圧 V_C を I_1，I_2 を用いて表せ．
   (d) (b) と (c) の結果から，キルヒホッフの電圧則を利用して，I_2 を I_1 を用いて表せ．
   (e) $L_1 = \frac{1}{100\pi}$ H，$L_2 = \frac{4}{100\pi}$ H，$M = \frac{2}{100\pi}$ H，$C = \frac{1}{800\pi}$ F，周波数 $f = 50$ Hz として (a)，(c)，(d) の結果から $Z_i = V_i/I_i$ を求めよ．

2. (a) 変成器を T 形等価回路で表現した回路を書け．
   (b) $L_1 = \frac{1}{100\pi}$ H，$L_2 = \frac{4}{100\pi}$ H，$M = \frac{2}{100\pi}$ H，$C = \frac{1}{800\pi}$ F，周波数 $f = 50$ Hz として，(a) で求めた回路に対して入力インピーダンス Z_i を求めよ．



解答

1. (a) $V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2$ $\boxed{10}$
   (b) $V_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2$ $\boxed{10}$
   (c) $V_C = \dfrac{I_1 + I_2}{j\omega C}$ $\boxed{10}$
   (d) $V_2 + V_C = 0$ より

$$j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 + \frac{I_1 + I_2}{j\omega C} = 0$$

$$\left(j\omega M + \frac{1}{j\omega C}\right) I_1 + \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}\right) I_2 = 0$$

$$I_2 = -\frac{\left(j\omega M + \frac{1}{j\omega C}\right)}{\left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}\right)} I_1 = -\frac{1 - \omega^2 CM}{1 - \omega^2 CL_2} I_1 \quad \boxed{15}$$

   (e) (d) の結果に与えられた数値を代入すると，$\omega C = \frac{1}{8}$ S，$\omega L_1 = 1\ \Omega$，$\omega L_2 = 4\ \Omega$，$\omega M = 2\ \Omega$ より

$$I_2 = -\frac{1 - \frac{1}{8}\cdot 2}{1 - \frac{1}{8}\cdot 4} I_1 = -\frac{8-2}{8-4} I_1 = -\frac{3}{2} I_1$$

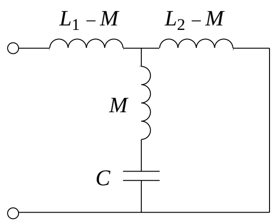
$V_i = V_1 + V_C$ より

$$\begin{aligned} V_i &= j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 + \frac{I_1 + I_2}{j\omega C} = \left(j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C}\right) I_1 + \left(j\omega M + \frac{1}{j\omega C}\right) I_2 \\ &= j(1-8) I_1 + j(2-8)\cdot\left(-\frac{3}{2} I_1\right) = (-j7 + j9) I_1 = j2 \cdot I_1 \end{aligned}$$

よって

$$Z_i = j2\ \Omega \quad \boxed{15}$$

2. (a) 変成器を T 形等価回路で置き換えると以下の回路が得られる．



$\boxed{20}$

(b) (a) の回路に対して入力インピーダンスを求めると

$$\begin{aligned} Z_i &= j\omega(L_1 - M) + \left\{ j\omega M + \frac{1}{j\omega C} \right\} // \{ j\omega(L_2 - M) \} \\ &= -j + (-j6)//(j2) = -j + \frac{(-j6)\cdot(j2)}{-j6 + j2} = -j + \frac{12}{-j4} = -j + j3 \\ &= j2\ \Omega \quad \boxed{20} \end{aligned}$$

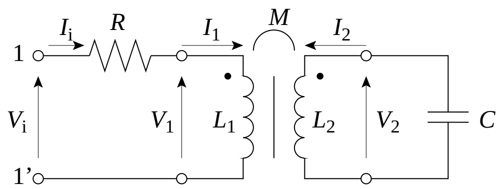
その他の採点基準

単位の無いもの：	**1点減点**
力率の進みか遅れかを明記しないもの：	**1 点減点**
解法がわかっていると思われるもの：	**60〜75%程度の点数を与える**
	(20 → 15 or 10, 15 → 10, 10, →6, 5 → 3)

小テスト

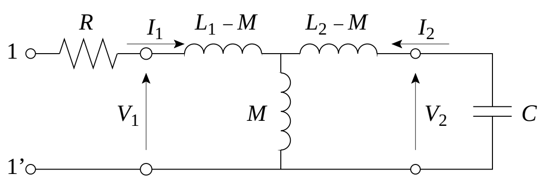
図に示す変成器を含む回路に対して，以下の問に答よ．ここに 角周波数を ω，変成器の相互インダクタンスを M，1 次側，2 次側の自己インダクタンスをそれぞれ L_1，L_2，抵抗を R，コンデンサの静電容量を C とし，図のように，1 次側コイルに流れる電流を I_1，2 次側コイルに流れる電流を I_2 とする．

1. 電流 I_1 と I_2 の比 I_2/I_1 を求めよ．
2. 端子 1，1′ から右側を見た入力インピーダンス $Z_i(=V_i/I_i)$ を求めよ．
3. 回路の力率が 1 となる角周波数 ω_0 を求めよ



解答

図のような T 形等価回路を考える



$\boxed{40}$

1. I_1 はコイル $(L_1 - M)$，L_2 は $(L_2 - M)$ に流れる電流なので，電流の比は並列回路の分流の法則を使って，電流 I_2 の向きに注意すると

$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{j\omega M}{j\omega M + \left\{ j\omega(L_2 - M) + \frac{1}{j\omega C} \right\}} = -\frac{j\omega M}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\omega^2 MC}{1 - \omega^2 L_2 C} \quad \boxed{20}$$

2. 入力インピーダンス Z_i は

$$\begin{aligned}
Z_i &= R + j\omega(L_1 - M) + (j\omega M) // \left\{ j\omega(L_2 - M) + \frac{1}{j\omega C} \right\} \\
&= R + j\omega(L_1 - M) + \frac{j\omega M \left(j\omega(L_2 - M) + \frac{1}{j\omega C} \right)}{j\omega M + \left(j\omega(L_2 - M) + \frac{1}{j\omega C} \right)} \\
&= R + j\omega(L_1 - M) + \frac{j\omega M \left\{ \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C} \right) - j\omega M \right\}}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}} \\
&= R + j\omega(L_1 - M) + j\omega M + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}} \\
&= R + j\omega \left(L_1 + \frac{\omega^2 M^2 C}{1 - \omega^2 L_2 C} \right) \quad \boxed{20}
\end{aligned}$$

3. インピーダンスの虚部を 0 と置くと

$$\begin{aligned}
& L_1 + \frac{\omega_0^2 M^2 C}{1 - \omega_0^2 L_2 C} = 0 \\
& L_1 - \omega_0^2 L_1 L_2 C + \omega_0^2 M^2 C = 0 \\
& L_1 - \omega_0^2 C(L_1 L_2 - M^2) = 0 \\
& \omega_0 = \sqrt{\frac{L_1}{(L_1 L_2 - M^2)C}} \quad \boxed{20}
\end{aligned}$$

別解

1. 変成器の基本式より

$$
\begin{aligned}
V_1 &= j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \\
V_2 &= j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 \quad \boxed{30}
\end{aligned}
$$

また，V_2 はコンデンサ C にかかる電圧に等しく，コンデンサには下から上向きに電流 I_2 が流れるので

$$V_2 = \frac{-I_2}{j\omega C} \quad \boxed{10}$$

上式より

$$
\begin{aligned}
& j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 = \frac{-I_2}{j\omega C} \\
& \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}\right) I_2 = -j\omega M I_1
\end{aligned}
$$

よって

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-j\omega M}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\omega^2 MC}{1-\omega^2 L_2 C} \quad \boxed{20}$$

2. 前問の結果を使うと V_1 は以下のように求まる．

$$
\begin{aligned}
V_1 &= j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M \cdot \frac{\omega^2 MC}{1-\omega^2 L_2 C} I_1 \\
&= = j\omega \left(L_1 + \frac{\omega^2 M^2 C}{1-\omega^2 L_2 C}\right) I_1
\end{aligned}
$$

$I_i = I_1$，$V_i = RI_i + V_1$ であるので

$$Z_i = \frac{V_i}{I_i} = R + \frac{V_1}{I_1} = R + j\omega\left(L_1 + \frac{\omega^2 M^2 C}{1-\omega^2 L_2 C}\right) \quad \boxed{20}$$

3. インピーダンスの虚部を 0 と置くと

$$
\begin{aligned}
& L_1 + \frac{\omega_0^2 M^2 C}{1-\omega_0^2 L_2 C} = 0 \\
& L_1 - \omega_0^2 L_1 L_2 C + \omega_0^2 M^2 C = 0 \\
& L_1 - \omega_0^2 C(L_1 L_2 - M^2) = 0 \\
& \omega_0 = \sqrt{\frac{L_1}{(L_1 L_2 - M^2)C}} \quad \boxed{20}
\end{aligned}
$$

その他の採点基準

単位の無いもの：	**1点減点**
力率の進みか遅れかを明記しないもの：	**1 点減点**
式変形の単純な計算ミス：	**90%程度の点数を与える**
式を整理していないもの： **(分数の分母分子に分数がある、** **約分がされていない、** **実部と虚部が分離されていない等)**	**80%程度の点数を与える**
解法がわかっていると思われるもの：	**60〜75%程度の点数を与える** **(例：20 → 15 or 10, 15 → 10，10, →6, 5 → 3)**