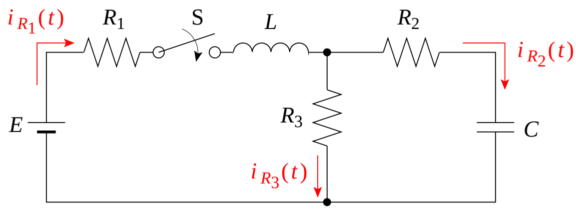
# 電気回路演習 II 第 15 回 (平成 20 年 2 月 7 日 (木) 16:15〜)

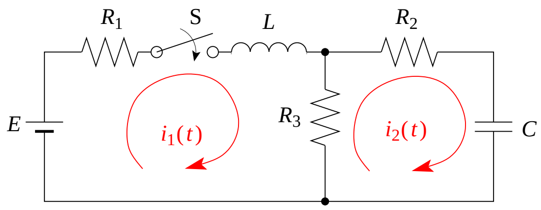
## 演習

図の回路において，時刻 $t = 0$ でスイッチが閉じるとき，抵抗 $R_1$，$R_2$，$R_3$ に流れる電流を求めよ．ただし，$t = 0$ でコンデンサに蓄えられている電荷，コイルに流れている電流は 0 とし，$R_1 = 3\ \Omega$，$R_2 = 3\ \Omega$，$R_3 = 2\ \Omega$，$L = 4$ H，$C = 1$ F，$E = 15$ V とする．




## 解答

下図のように閉路電流を設定する．




各閉路に対してキルヒホッフの電圧則を用いると以下の式を得る．

$$L\frac{di_1(t)}{dt} + R_1 i_1(t) + R_3\left(i_1(t) - i_2(t)\right) = E$$
$$R_3\left(i_2(t) - i_1(t)\right) + R_2 i_2(t) + \frac{1}{C}\int i_2(t)dt = 0$$

これに具体的な数値を代入して整理すると

$$4\frac{di_1}{dt} + 5i_1(t) - 2i_2(t) = 15$$
$$-2i_1(t) + 5i_2(t) + \int i_2(t)dt = 0$$

となり，これをラプラス変換すると以下の式を得る．

$$4\left\{sI_1(s) - i_1(0)\right\} + 5I_1(s) - 2I_2(s) = \frac{15}{s}$$
$$-2I_1(s) + 5I_2(s) + \frac{1}{s}\left(I_2(s) + \int i_2(t)dt\Big|_{t=0}\right) = 0$$

ここで，$t = 0$ においてコンデンサの電荷，コイルの電流は 0 であることを考慮し，最終的に行列の形に整理すると以下の式を得る．

$$\begin{bmatrix} 4s+5 & -2 \\ -2 & \frac{5s+1}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

この連立一次方程式を解くために Cramer の公式を用いると，行列式 $\Delta$ は

$$\Delta = (4s+5)\cdot\frac{5s+1}{s} - (-2)^2 = \frac{(4s+5)(5s+1) - 4s}{s} = \frac{20s^2+25s+5}{s} = \frac{5(s+1)(4s+1)}{s}$$

であり，$I_1(s)$，$I_2(s)$ は以下のように求まる．

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{15}{s} & -2 \\ 0 & \frac{5s+1}{s} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{s}{5(s+1)(4s+1)}\cdot\frac{15}{s}\cdot\frac{5s+1}{s} = \frac{3(5s+1)}{s(s+1)(4s+1)}$$

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} 4s+5 & \frac{15}{s} \\ -2 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{s}{5(s+1)(4s+1)} \cdot \frac{15}{s} \cdot (-2) = \frac{6}{(s+1)(4s+1)}$$

これらをラプラス逆変換すると，各閉路電流 $i_1(t)$，$i_2(t)$ は以下のように求まる．

$$\begin{aligned} i_1(t) &= sI_1(s)e^{st}\big|_{s=0} + \left(s+\frac{1}{4}\right)I_1(s)e^{st}\Big|_{s=-\frac{1}{4}} + (s+1)I_1(s)e^{st}\big|_{s=-1} \\ &= \frac{3(5s+1)}{(s+1)(4s+1)}e^{st}\Big|_{s=0} + \frac{3(5s+1)}{4s(s+1)}e^{st}\Big|_{s=-\frac{1}{4}} + \frac{3(5s+1)}{s(4s+1)}e^{st}\Big|_{s=-1} \\ &= 3 + e^{-\frac{t}{4}} - 4e^{-t} \text{ [A]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_2(t) &= \left(s+\frac{1}{4}\right)I_2(s)e^{st}\Big|_{s=-\frac{1}{4}} + (s+1)I_2(s)e^{st}\big|_{s=-1} = \frac{6}{4(s+1)}e^{st}\Big|_{s=-\frac{1}{4}} + \frac{6}{(4s+1)}e^{st}\Big|_{s=-1} \\ &= 2e^{-\frac{t}{4}} - 2e^{-t} \text{ [A]} \end{aligned}$$

したがって，各抵抗に流れる電流は

$$\begin{aligned} i_{R_1}(t) &= i_1(t) = 3 + e^{-\frac{t}{4}} - 4e^{-t} \text{ [A]} \\ i_{R_2}(t) &= i_2(t) = 2e^{-\frac{t}{4}} - 2e^{-t} \text{ [A]} \\ i_{R_3}(t) &= i_1(t) - i_2(t) = 3 - e^{-\frac{t}{4}} - 2e^{-t} \text{ [A]} \end{aligned}$$

これらの $t \to \infty$ における値は

$$i_{R_1}(\infty) = i_{R_3}(\infty) = 3 \text{ A}, \quad i_{R_3}(\infty) = 0 \text{ A}$$

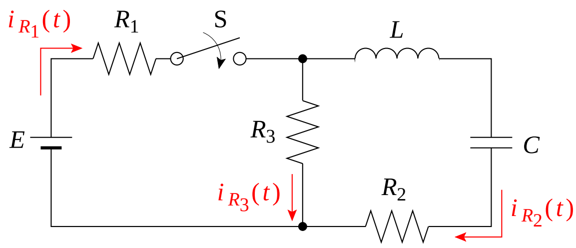
であり，直流電圧源の場合の定常状態の値 (コンデンサは開放，コイルは短絡と考えて)

$$I_1 = I_3 = \frac{E}{R_1+R_3} = \frac{15}{3+2} = 3 \text{ A}, \quad I_2 = 0 \text{ A}$$

と一致している．

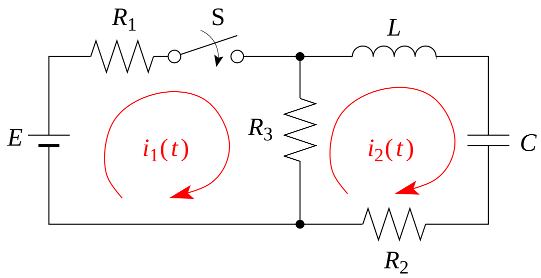
### 小テスト

図の回路において，時刻 $t=0$ でスイッチが閉じるとき，抵抗 $R_1$，$R_2$，$R_3$ に流れる電流を求めよ．ただし，$t=0$ でコンデンサに蓄えられている電荷，コイルに流れている電流は 0 とし，$R_1 = 2\ \Omega$，$R_2 = 2\ \Omega$，$R_3 = 2\ \Omega$，$L = 1$ H，$C = 0.5$ F，$E = 8$ V とする．




### 解答

下図のように閉路電流を設定する．




各閉路に対してキルヒホッフの電圧則を用いると以下の式を得る．

$$
\begin{aligned}
&R_1 i_1(t) + R_3\left(i_1(t) - i_2(t)\right) = E \\
&L\frac{di_2(t)}{dt} + C\int i_2(t)dt + R_2 i_2(t) + R_3\left(i_2(t) - i_1(t)\right) = 0
\end{aligned}
$$

これに具体的な数値を代入して整理すると

$$4i_1(t) - 2i_2(t) = 8 \tag{1}$$

$$-2i_1(t) + \frac{di_2(t)}{dt} + 4i_2(t) + 2\int i_2(t)dt = 0 \tag{2}$$

となり，これをラプラス変換すると以下の式を得る．

$$
\begin{aligned}
&4I_1(s) - 2I_2(s) = \frac{8}{s} \\
&-2I_1(s) + \{sI_2(s) - i_2(0)\} + 4I_2(s) + \frac{2}{s}\left(I_2(s) + \int i_2(t)dt\bigg|_{t=0}\right) = 0
\end{aligned}
$$

ここで，$t=0$ においてコンデンサの電荷，コイルの電流は 0 であることを考慮し，最終的に行列の形に整理すると以下の式を得る．

$$
\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & \frac{s^2+4s+2}{s} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \frac{8}{s} \\ 0 \end{bmatrix}
$$

この連立一次方程式を解くために Cramer の公式を用いると，行列式 $\Delta$ は

$$\Delta = \frac{4(s^2+4s+2)}{s} - (-2)^2 = \frac{4s^2+16s+8-4s}{s} = \frac{4(s^2+3s+2)}{s} = \frac{4(s+1)(s+2)}{s}$$

であり，$I_1(s)$，$I_2(s)$ は以下のように求まる．

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{8}{s} & -2 \\ 0 & \frac{s^2+4s+2}{s} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{s}{4(s+1)(s+2)} \cdot \frac{8}{s} \cdot \frac{s^2+4s+2}{s} = \frac{2(s^2+4s+2)}{s(s+1)(s+2)}$$

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} 4 & \frac{8}{s} \\ -2 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{s}{4(s+1)(s+2)} \cdot \frac{8}{s} \cdot (-2) = \frac{4}{(s+1)(s+2)}$$

これらをラプラス逆変換すると，各閉路電流 $i_1(t)$，$i_2(t)$ は以下のように求まる．

$$\begin{aligned}
i_1(t) &= sI_1(s)e^{st}\Big|_{s=0} + (s+1)\,I_1(s)e^{st}\Big|_{s=-1} + (s+2)I_1(s)e^{st}\Big|_{s=-2} \\
&= \frac{2(s^2+4s+2)}{(s+1)(s+2)}e^{st}\bigg|_{s=0} + \frac{2(s^2+4s+2)}{s(s+2)}e^{st}\bigg|_{s=-1} + \frac{2(s^2+4s+2)}{s(s+1)}e^{st}\bigg|_{s=-2} \\
&= 2 + 2e^{-t} - 2e^{-2t} \text{ [A]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_2(t) &= (s+1)\,I_2(s)e^{st}\Big|_{s=-1} + (s+2)I_2(s)e^{st}\Big|_{s=-2} = \frac{4}{(s+2)}e^{st}\bigg|_{s=-1} + \frac{4}{(s+1)}e^{st}\bigg|_{s=-2} \\
&= 4e^{-t} - 4e^{-2t} \text{ [A]}
\end{aligned}$$

したがって，各抵抗に流れる電流は

$$\begin{aligned}
i_{R_1}(t) &= i_1(t) = 2 + 2e^{-t} - 2e^{-2t} \text{ [A]} \\
i_{R_2}(t) &= i_2(t) = 4e^{-t} - 4e^{-2t} \text{ [A]} \\
i_{R_3}(t) &= i_1(t) - i_2(t) = 2 - 2e^{-2t} + 2e^{-2t} \text{ [A]}
\end{aligned}$$

これらの $t \to \infty$ における値は

$$i_{R_1}(\infty) = i_{R_3}(\infty) = 2 \text{ A}, \quad i_{R_3}(\infty) = 0 \text{ A}$$

であり，直流電圧源の場合の定常状態の値 (コンデンサは開放，コイルは短絡と考えて)

$$I_1 = I_3 = \frac{E}{R_1 + R_3} = \frac{8}{2+2} = 2 \text{ A}, \quad I_2 = 0 \text{ A}$$

と一致している．

**(別解)** この問題では，方程式を行列の形にせずに，式 (1) を

$$i_1(t) = 2 + \frac{1}{2}i_2(t) \tag{3}$$

と変形し，式 (2) に代入して

$$-4 - i_2(t) + \frac{di_2(t)}{dt} + 4i_2(t) + 2\int i_2(t)dt = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{di_2(t)}{dt} + 3i_2(t) + 2\int i_2(t)dt = 4$$

の形にして解く方が計算が楽である．上式をラプラス変換すると

$$\{sI_2(s) - i_2(0)\} + 3I_2(s) + 2 + \frac{2}{s}\left\{I_2(s) + \int i_2(t)dt\bigg|_{t=0}\right\} = \frac{4}{s}$$

であり，初期条件を考慮すると

$$\frac{s^2+3s+2}{s} \cdot I_2(s) = \frac{4}{s} \quad \rightarrow \quad I_2(s) = \frac{4}{(s+1)(s+2)} = \left(\frac{4}{s+1} - \frac{4}{s+2}\right)$$

$I_2(s)$ をラプラス逆変換すると

$$i_2(t) = 4e^{-t} - 4e^{-2t} \text{ [A]}$$

これを式 (3) に代入すると

$$i_1(t) = 2 + \frac{1}{2}i_2(t) = 2 + 2e^{-t} - 2e^{-2t} \text{ [A]}$$