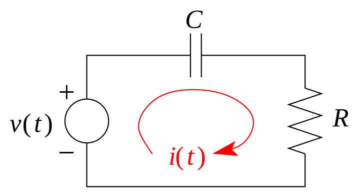
電気回路演習 II 第 14 回 (平成 20 年 2 月 6 日 (水) 17:15〜)

演習

1. 図の回路において，$t < 0$ では $v(t) = 0$ であり，$t \geq 0$ で電圧 $v(t)$ を与えるものとする．以下の問いに答よ．



   (a) 時刻 $t \geq 0$ で，電流 $i(t)$ についての回路方程式を求めよ．

   (b) 入力電圧 $v(t)$ のラプラス変換が $V(s)$，電流 $i(t)$ のラプラス変換が $I(s)$ と書けるとして，設問 (a) で求めた回路方程式をラプラス変換した式を求めなさい．

   (c) $R = 5\ \Omega$，$C = 0.05$ F，$t = 0$ でコンデンサに蓄えられている電荷を 0 として，設問 (b) より $I(s)$ を表す式を求めよ．

2. 問 1(c) の場合について以下の問いに答よ．

   (a) $v(t) = \delta(t)$ [V] (単位インパルス) であるとき，電流の時間変化 $i(t)$ $(= h(t))$ を求めよ．

   (b) $v(t) = 10te^{-4t}u(t)$ [V] であるとき，電流の時間変化 $i(t)$ を求めよ．

   (c) 任意の電圧 $v(t)$ が与えられたときの回路の応答 $i(t)$ は，回路のインパルス応答 $h(t)$ を使って以下のように計算できる．

$$i(t) = \int_0^t h(\tau)\, v(t-\tau)\, d\tau$$

   上式と設問 (a) の結果を用いて設問 (b) の解を求め，答が一致することを確認せよ．

解答

1. (a) キルヒホッフの電圧則より

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = v(t)$$

   (b) ラプラス変換すると

$$RI(s) + \frac{1}{C}\left\{\frac{I(s)}{s} + \frac{1}{s}\int i(t)dt\Big|_{t=0}\right\} = V(s)$$

   (c) 与えられた数値を代入して，$I(s)$ について解くと

$$5I(s) + \frac{20}{s}I(s) = V(s) \qquad \rightarrow \qquad I(s) = \frac{sV(s)}{5(s+4)}$$

2. (a) $v(t) = \delta(t)$ のラプラス変換は

$$V(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

   であるので

$$I(s) = \frac{s}{5(s+4)} = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{-4}{s+4}\right)$$

   上式をラプラス逆変換すると

$$i(t) = \frac{1}{5}\left(\delta(t) - 4e^{-4t}\right)$$

(b) $v(t) = 10te^{-4t}u(t)$ のラプラス変換は，ラプラス変換表と推移定理を用いて

$$V(s) = \frac{10}{(s+4)^2}$$

であるので

$$I(s) = \frac{2s}{(s+4)^3} = 2 \cdot \frac{1}{(s+4)^2} - 4 \cdot \frac{2}{(s+4)^3}$$

上式をラプラス逆変換すると

$$i(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{I(s)\right\} = 2te^{-4t} - 4t^2e^{-4t} = 2t(1-2t)e^{-4t}\ \mathrm{A}$$

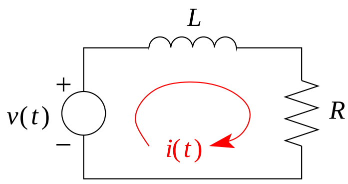
(c)

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_0^t 2\left(\delta(\tau) - 4e^{-4\tau}\right)(t-\tau)e^{-4(t-\tau)}d\tau \\ &= 2\int_0^t \delta(\tau)(t-\tau)e^{-4(t-\tau)}d\tau + 8e^{-4t}\int_0^t (\tau - t)d\tau \\ &= 2te^{-4t} + 8e^{-4t}\left[\frac{1}{2}\tau^2 - t\tau\right]_0^t = 2te^{-4t} + 8e^{-4t}\left(\frac{1}{2}t^2 - t^2\right) \\ &= 2te^{-4t} - 4t^2e^{-4t} = 2t(1-2t)e^{-4t}\ [\mathrm{A}] \end{aligned}$$

ここで，$t > 0$ のとき $\int_0^t \delta(\tau)f(\tau)d\tau = f(0)$ を用いている．

小テスト

1. 図の回路において，$t < 0$ では $v(t) = 0$ であり，$t \geq 0$ で電圧 $v(t)$ を与えるものとする．以下の問いに答よ．



   (a) 時刻 $t \geq 0$ で，電流 $i(t)$ についての回路方程式を求めよ．

   (b) 入力電圧 $v(t)$ のラプラス変換が $V(s)$，電流 $i(t)$ のラプラス変換が $I(s)$ と書けるとして，設問 (a) で求めた回路方程式をラプラス変換した式を求めなさい．

   (c) $R = 6\ \Omega$，$L = 2$ H，$t = 0$ でコイルに流れる電流を 0 として，設問 (b) より $I(s)$ を表す式を求めよ．

2. 問 1(c) の場合について以下の問いに答よ．

   (a) $v(t) = \delta(t)$ [V] (単位インパルス) であるとき，電流の時間変化 $i(t)$ $(= h(t))$ を求めよ．

   (b) $v(t) = 12\left(1 - e^{-5t}\right) u(t)$ [V] であるとき，電流の時間変化 $i(t)$ を求めよ．

   (c) 任意の電圧 $v(t)$ が与えられたときの回路の応答 $i(t)$ は，回路のインパルス応答 $h(t)$ を使って以下のように計算できる．

$$i(t) = \int_0^t h(\tau)\, v(t - \tau)\, d\tau$$

   上式と設問 (a) の結果を用いて設問 (b) の解を求め，答が一致することを確認せよ．

解答

1. (a) キルヒホッフの電圧則より

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = v(t)$$

   (b) ラプラス変換すると

$$L\{sI(s) - i(0)\} + RI(s) = V(s)$$

   (c) 与えられた数値を代入して，$I(s)$ について解くと

$$2sI(s) + 6I(s) = V(s) \qquad \to \qquad I(s) = \frac{V(s)}{2(s+3)}$$

2. (a) $v(t) = \delta(t)$ のラプラス変換は

$$V(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

   であるので

$$I(s) = \frac{1}{2(s+3)}$$

   上式をラプラス逆変換すると

$$i(t) = \frac{1}{2}e^{-3t}\ [\text{A}]$$

(b) $v(t) = 12\left(1 - e^{-5t}\right)u(t)$ のラプラス変換は，ラプラス変換表と推移定理を用いて

$$V(s) = 12\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+5}\right) = \frac{60}{s(s+5)}$$

であるので

$$I(s) = \frac{30}{s(s+3)(s+5)}$$

上式をラプラス逆変換すると

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = sI(s)e^{st}\Big|_{s=0} + (s+3)I(s)e^{st}\Big|_{s=-3} + (s+5)I(s)e^{st}\Big|_{s=-5} \\ &= 2 - 5e^{-3t} + 3e^{-5t}\ [\mathrm{A}] \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_0^t \frac{1}{2}e^{-3\tau} \cdot 12\left(1 - e^{-5(t-\tau)}\right)d\tau \\ &= 6\int_0^t \left(e^{-3\tau} - e^{-5t}e^{2\tau}\right)d\tau = 6\left[\frac{e^{-3\tau}}{-3} - e^{-5t}\frac{e^{2\tau}}{2}\right]_0^t \\ &= -2e^{-3t} - 3e^{-3t} + 2 + 3e^{-5t} \\ &= 2 - 5e^{-3t} + 3e^{-5t}\ [\mathrm{A}] \end{aligned}$$