電気回路演習 II 第 13 回 (平成 20 年 2 月 1 日 (金))

演習

1. 図 1 の回路において $t = 0$ でスイッチが a から b に切り替わるものとする．$t > 0$ での電流の時間変化 $i(t)$ をラプラス変換を用いて解け．ただし，$R_1 = 1\ \Omega$，$R_2 = 3\ \Omega$，$C = 0.5$ F，$E_0 = 2$ V，$E_1 = 10$ V とする．また $t = 0$ でコンデンサには電荷 $q(0) = 1$ C が蓄えられているものとする．

2. 図 2 の回路において $t = 0$ でスイッチが a から b に切り替わるものとする．電流 $i(t)$ のラプラス変換 $I(s)$ を求めよ．ただし，$R = 4\ \Omega$，$L = 1$ H，$C = \frac{1}{3}$ F，$v(t) = 10(\cos 3t + \sin 3t)$ [V]，$i(0) = 3$ A，$q(0) = -1$ C とする．

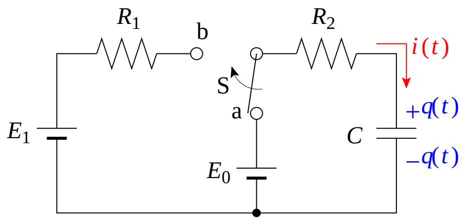


図 1

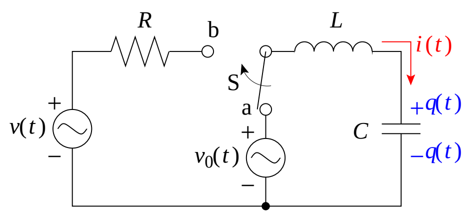


図 2

解答

1. キルヒホッフの電圧則より $t > 0$ での回路方程式は以下のように書ける

$$(R_1 + R_2)i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = E_1 \quad \boxed{10}$$

$i(t)$ のラプラス変換を $I(s)$ とし，$q(0) = \int i(t)dt\Big|_{t=0}$ の関係を用いて，上式をラプラス変換すると

$$(R_1 + R_2)I(s) + \frac{1}{sC}\{I(s) + q(0)\} = \frac{E_1}{s} \quad \boxed{20} \rightarrow \quad 4I(s) + \frac{2}{s}\{I(s) + 1\} = \frac{10}{s}$$

上式を $I(s)$ について解くと

$$(4s + 2)I(s) = 8 \quad \rightarrow \quad I(s) = \frac{4}{2s + 1} = \frac{2}{s + \frac{1}{2}} \quad \boxed{10}$$

$I(s)$ をラプラス逆変換すると，求める電流 $i(t)$ は以下のように求まる．

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s + \frac{1}{2}}\right\} = 2e^{-\frac{t}{2}}\ [\mathrm{A}] \quad \boxed{20}$$

ちなみに，電荷 $q(t)$ は以下のように求まる

$$q(t) = q(0) + \int_0^t i(t)dt = 1 + \left[-4e^{-\frac{t}{2}}\right]_0^t = 1 + \left(-4e^{-\frac{t}{2}} + 4\right) = 5 - 4e^{-\frac{t}{2}}\ [\mathrm{C}]$$

(別解) 電荷を使って方程式を立てると

$$(R_1 + R_2)\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E_1 \quad \rightarrow \quad 4\frac{dq(t)}{dt} + 2q(t) = 10$$

上式のラプラス変換は

$$4\{sQ(s) - q(0)\} + 2Q(s) = \frac{10}{s} \quad \rightarrow \quad Q(s) = \frac{4s + 10}{s(4s + 2)} = \frac{s + \frac{5}{2}}{s\left(s + \frac{1}{2}\right)}$$

$Q(s)$ をラプラス逆変換すると

$$q(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\} = sQ(s)e^{st}\Big|_{s=0} + \left(s + \frac{1}{2}\right)Q(s)e^{st}\Big|_{s=-\frac{1}{2}} = 5 - 4e^{-\frac{t}{2}}\ [\mathrm{C}]$$

求める電流 $i(t)$ は

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = 2e^{-\frac{t}{2}}\ [\mathrm{A}]$$

2. $t > 0$ での回路方程式は

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = v(t) \qquad \rightarrow \qquad \frac{di(t)}{dt} + 4i(t) + 3\int i(t)dt = 10\left(\cos 3t + \sin 3t\right) \quad \boxed{10}$$

上式をラプラス変換すると

$$\{sI(s) - i(0)\} + 4I(s) + 3\cdot\frac{1}{s}\{I(s) + q(0)\} = \frac{10(s+3)}{s^2+3^2} \quad \boxed{20}$$

$i(0) = 3$ A，$q(0) = -1$ C を代入して，上式を整理すると

$$\left(s^2 + 4s + 3\right)I(s) = \frac{10s(s+3)}{s^2+9} + (3s+3) \qquad \rightarrow \qquad (s+1)(s+3)I(s) = \frac{10s(s+3)}{s^2+9} + 3(s+1)$$

$I(s)$ について解くと

$$I(s) = \frac{10s}{(s+1)(s^2+9)} + \frac{3}{s+3} \quad \boxed{10}$$

ちなみに，上式のラプラス逆変換は

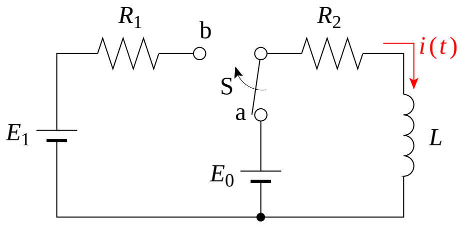
$$I(s) = \frac{10s}{(s+1)(s^2+9)} + \frac{3}{s+3} = \frac{s+3\cdot 3}{s^2+3^2} - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+3}$$

と変形して

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{I(s)\right\} = \cos 3t + 3\sin 3t - e^{-t} + 3e^{-3t} \ [\mathrm{A}]$$

小テスト

図の回路において $t = 0$ でスイッチが a から b に切り替わるものとする．$t > 0$ での電流の時間変化 $i(t)$ をラプラス変換を用いて解け．ただし，$R_1 = 1\ \Omega$，$R_2 = 5\ \Omega$，$L = 2$ H，$E_0 = 5$ V，$E_1 = 24$ V，$i(0) = 1$ A とする．また，微分方程式を直接解いて得られる結果と一致することを確かめよ．



解答

キルヒホッフの電圧則より，回路方程式は

$$L\frac{di(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i(t) = E_1 \qquad \rightarrow \qquad 2\frac{di(t)}{dt} + 6i(t) = 24 \quad \boxed{20} \tag{1}$$

$i(t)$ のラプラス変換を $I(s)$ として上式をラプラス変換し，$i(0) = 1$ A を代入すると

$$2\{sI(s) - i(0)\} + 6I(s) = \frac{24}{s} \qquad \rightarrow \qquad 2\{sI(s) - 1\} + 6I(s) = \frac{24}{s} \quad \boxed{20}$$

上式を $I(s)$ について解くと

$$I(s) = \frac{s+12}{s(s+3)} \quad \boxed{10}$$

$I(s)$ をラプラス逆変換して $i(t)$ を求めると

$$\begin{aligned} i(t) &= sI(s)e^{st}\Big|_{s=0} + (s+3)I(s)e^{st}\Big|_{s=-3} = \frac{s+12}{s+3}e^{st}\Bigg|_{s=0} + \frac{s+12}{s}e^{st}\Bigg|_{s=-3} \\ &= 4 - 3e^{-3t}\ [\mathrm{A}] \quad \boxed{20} \end{aligned}$$

一方，式 (1) の微分方程式を直接解くと，定常解と過渡解はそれぞれ

$$\begin{aligned} i_s(t) &= 4\ \mathrm{A} \quad \boxed{10} \\ i_t(t) &= Ae^{-3t}\ [\mathrm{A}] \quad \boxed{10} \end{aligned}$$

であるので，一般解は

$$i(t) = i_s(t) + i_t(t) = 4 + Ae^{-3t}\ [\mathrm{A}]$$

となり，初期条件として $t = 0$ で $i(0) = 1$ A を代入すると

$$4 + A = 1 \qquad \rightarrow \qquad A = -3$$

と求まるので

$$i(t) = 4 - 3e^{-3t}\ [\mathrm{A}] \quad \boxed{10}$$

となり，ラプラス変換を用いて得られた結果と一致する．