電気回路演習 II 第 12 回 (平成 20 年 1 月 25 日 (金))

演習

1. 時間の関数 $f(t)$ のラプラス変換が

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

で表されることを利用して，以下の式のラプラス変換を求めよ．
ただし，$i(t)$ のラプラス変換は $I(s)$ であり，$T > 0$ とする．

(a) $\dfrac{di(t)}{dt}$ (b) $\displaystyle\int i(t)dt$ (c) $e^{-at}i(t)$ (d) $tu(t-T)$

2. ラプラス変換表とラプラス変換に関する定理を利用して，以下の関数のラプラス変換を求めよ．

(a) $\sqrt{2}\sin\left(2t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ (b) $\sqrt{2}e^{-3t}\sin\left(2t + \dfrac{\pi}{4}\right)$

3. 以下の関数のラプラス逆変換を求めよ．

(a) $\dfrac{2s+1}{s^2+7s+10}$ (b) $\dfrac{s+10}{s^2+25}$ (c) $\dfrac{s+12}{(s+2)^2+25}$ (d) $\dfrac{3s+5}{(s+1)^2(s+2)}$

解答

1. (a) 定義式に代入して部分積分を用いる

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{di(t)}{dt}\right\} &= \int_0^\infty \frac{di(t)}{dt}e^{-st}dt = \left[i(t)e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty i(t)\left(-se^{-st}\right)dt \\ &= \{0 - i(0)\} + s\int_0^\infty i(t)e^{-st}dt = -i(0) + sI(s) = sI(s) - i(0)\end{aligned}$$

(b) $i(t) = \dfrac{df(t)}{dt}$ と置いて，(a) の結果を利用する．$f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とする．

$$I(s) = \mathcal{L}\{i(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0) \quad \rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s}\left(I(s) + f(0)\right)$$

ここで，$f(t) = \int i(t)dt$ であるので

$$\mathcal{L}\left\{\int i(t)dt\right\} = F(s) = \frac{1}{s}\left(I(s) + \int i(t)dt\bigg|_{t=0}\right)$$

(c) 途中 $s + a = s'$ と置き換えると

$$\mathcal{L}\left\{e^{-at}i(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-at}i(t)\cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty i(t)e^{-(s+a)t}dt = \int_0^\infty i(t)e^{-s't}dt = I(s') = I(s+a)$$

(d) $u(t-T)$ は $t \geq T$ で値が 1，$t < T$ で値が 0 であるので

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{tu(t-T)\} &= \int_0^\infty tu(t-T)\cdot e^{-st}dt = \int_T^\infty te^{-st}dt = \left[t\frac{e^{-st}}{-s}\right]_T^\infty + \int_T^\infty \frac{e^{-st}}{s}dt \\ &= \frac{Te^{-Ts}}{s} + \left[\frac{e^{-st}}{-s^2}\right]_T^\infty = \frac{Te^{-Ts}}{s} + \frac{e^{-Ts}}{s^2} = \frac{e^{-Ts}}{s}\left(T + \frac{1}{s}\right)\end{aligned}$$

2. (a) 三角関数の加法定理より

$$\sqrt{2}\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\sin 2t\cos\frac{\pi}{4} + \cos 2t\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sin 2t + \cos 2t$$

ラプラス変換表を用いて上式をラプラス変換すると

$$\mathcal{L}\left\{\sqrt{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right\} = \frac{2}{s^2+2^2} + \frac{s}{s^2+2^2} = \frac{s+2}{s^2+4}$$

(b) (a) の結果に推移定理を適用すると

$$\mathcal{L}\left\{\sqrt{2}e^{-3t}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right\} = \frac{(s+3)+2}{(s+3)^2+4} = \frac{s+5}{s^2+6s+13}$$

3. (a) 分母を因数分解し

$$F(s) = \frac{2s+1}{s^2+7s+10} = \frac{2s+1}{(s+2)(s+5)}$$

と置くと，ラプラス逆変換は，逆変換積分演算を利用して

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+1}{s^2+7s+10}\right\} &= (s+2)F(s)e^{st}\Big|_{s=-2} + (s+5)F(s)e^{st}\Big|_{s=-5} \\ &= \left.\frac{2s+1}{s+5}e^{st}\right|_{s=-2} + \left.\frac{2s+1}{s+2}e^{st}\right|_{s=-5} = -e^{-2t}+3e^{-5t}\end{aligned}$$

(b) 以下のように変形して，ラプラス変換表を利用すると

$$\frac{s+10}{s^2+25} = \frac{s}{s^2+5^2} + \frac{2\cdot 5}{s^2+5^2} \quad \to \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+10}{s^2+25}\right\} = \cos 5t + 2\sin 5t$$

(c) 以下のように変形して，(b) の結果に推移定理を適用すると

$$\frac{s+12}{(s+2)^2+25} = \frac{(s+2)+10}{(s+2)^2+25} \quad \to \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+12}{(s+2)^2+25}\right\} = e^{-2t}\left(\cos 5t + 2\sin 5t\right)$$

(d) 与式を以下のように変形する

$$\begin{aligned}\frac{3s+5}{(s+1)^2(s+2)} &= \frac{K_1}{(s+1)^2} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{s+2} = \frac{K_1(s+2)+K_2(s+1)(s+2)+K_3(s+1)^2}{(s+1)^2(s+2)} \\ &= \frac{(K_2+K_3)s^2+(K_1+3K_2+2K_3)s+(2K_1+2K_2+K_3)}{(s+1)^2(s+2)}\end{aligned}$$

係数比較により

$$\begin{cases} K_2+K_3=0 \\ K_1+3K_2+2K_3=3 \\ 2K_1+2K_2+K_3=5 \end{cases} \quad \to \quad K_1=2, \quad K_2=1, \quad K_3=-1$$

よって

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{(s+1)^2(s+2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+2}\right\} = (2t+1)e^{-t} - e^{-2t}$$

あるいは，逆変換積分演算を利用すると，与式を $F(s)$ として

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{(s+1)^2(s+2)}\right\} &= \left.\frac{d}{ds}\left((s+1)^2F(s)e^{st}\right)\right|_{s=-1} + (s+2)F(s)e^{st}\Big|_{s=-2} \\ &= \left.\left(\frac{s+3}{s+2}te^{st} + \frac{1}{(s+2)^2}e^{st}\right)\right|_{s=-1} + \left.\frac{3s+5}{(s+1)^2}e^{st}\right|_{s=-2} = (2t+1)e^{-t} - e^{-2t}\end{aligned}$$

小テスト

1. 以下のラプラス変換を求めよ．ただし，$T > 0$ とする．

   (a) $\sin 3t$　(b) $e^{-4t}\sin 3t$　(c) e^{-5t}　(c) $u(t-T)$

2. 以下の関数のラプラス逆変換を求めよ．

   (a) $\dfrac{s+1}{s^2+7s+12}$　(b) $\dfrac{s+9}{2s^2+18}$　(c) $\dfrac{s+10}{2(s+1)^2+18}$

解答

1. (a) ラプラス変換表より

$$\mathcal{L}\{\sin 3t\} = \frac{3}{s^2+3^2} = \frac{3}{s^2+9}$$

あるいは

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin 3t\} &= \int_0^\infty \sin 3t \cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{e^{j3t}-e^{-j3t}}{j2}\cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{e^{-(s-j3)t}-e^{-(st+j3)t}}{j2}dt \\ &= \frac{1}{j2}\left[\frac{e^{-(s-j3)t}}{-(s-j3)} - \frac{e^{-(s+j3)t}}{-(s+j3)}\right]_0^\infty = \frac{1}{j2}\left[\frac{1}{s-j3}-\frac{1}{s+j3}\right] = \frac{1}{j2}\cdot\frac{j6}{s^2+3^2} \\ &= \frac{3}{s^2+9}\end{aligned}$$

(b) 前問の結果から，推移定理を用いると

$$\mathcal{L}\left\{e^{-4t}\sin 3t\right\} = \frac{3}{(s+4)^2+9} = \frac{3}{s^2+8s+25}$$

(c) ラプラス変換表より

$$\mathcal{L}\left\{e^{-5t}\right\} = \frac{1}{s+5}$$

あるいは

$$\mathcal{L}\left\{e^{-5t}\right\} = \int_0^\infty e^{-5t}\cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s+5)t}dt = \left[\frac{e^{-(s+5)t}}{-(s+5)}\right]_0^\infty = \frac{1}{s+5}$$

(d) $0 < t < T$ では $u(t-T) = 0$，$t \geq T$ では $u(t-T) = 1$ であるので

$$\mathcal{L}\{u(t-T)\} = \int_0^\infty u(t-T)\cdot e^{-st}dt = \int_T^\infty e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_T^\infty = \frac{e^{-Ts}}{s}$$

2. (a) 与式を $F(s)$ と置いて以下のように分母を因数分解する

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2+7s+12} = \frac{s+1}{(s+3)(s+4)}$$

上式より，ラプラス逆変換は，逆変換積分演算を利用して

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+7s+12}\right\} &= (s+3)F(s)e^{st}\Big|_{s=-3} + (s+4)F(s)e^{st}\Big|_{s=-4} \\ &= \frac{s+1}{s+4}e^{st}\bigg|_{s=-3} + \frac{s+1}{s+3}e^{st}\bigg|_{s=-4} = -2e^{-3t}+3e^{-4t}\end{aligned}$$

(b) 与式を以下のように変形する

$$\frac{s+9}{2s^2+18} = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+3^2} + \frac{3\cdot 3}{s^2+3^2}\right)$$

上式をラプラス逆変換すると

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+9}{2s^2+18}\right\}=\frac{1}{2}\left(\cos 3t+3\sin 3t\right)$$

(c) 与式を以下のように変形する

$$\frac{s+10}{2(s+1)^2+18}=\frac{(s+1)+9}{2(s+1)^2+18}$$

上式のラプラス逆変換は (b) の結果に推移定理を用いて

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+10}{2(s+1)^2+18}\right\}=\frac{1}{2}e^{-t}\left(\cos 3t+3\sin 3t\right)$$