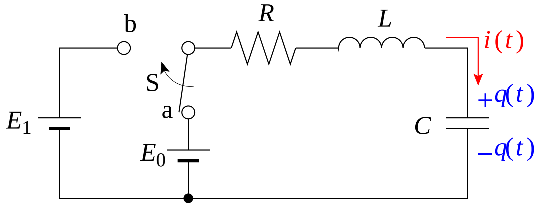
電気回路演習 II 第 11 回 (平成 19 年 1 月 16 日 (水))

演習

図に示す回路において，スイッチ S が端子 a に接続された状態で十分な時間が経過した後，時刻 $t=0$ でスイッチ S を端子 a から端子 b へと切り換えた．以下の問に答えなさい．なお，$R=3\ \Omega$，$L=0.5$ H，$C=0.08$ F，$E_0=5$ V，$E_1=15$ V とする．



(a) $t<0$ の定常状態でコンデンサ C に蓄えられている電荷 Q_0 とコイルに流れている電流 I_0 を求めよ．

(b) コンデンサ C に蓄えられる電荷を $q(t)$ とする．この $q(t)$ を用いて，$t>0$ における回路の微分方程式を示せ．

(c) 設問 (b) で求めた微分方程式に対する定常解 $q_s(t)$ を求めよ．

(d) 設問 (b) で求めた微分方程式に対する過渡解 $q_t(t)$ を求めよ．

(e) $t=0$ での初期条件を考慮して，$t>0$ においてコンデンサに蓄えられている電荷 $q(t)$ と流れている電流 $i(t)$ を求めよ．

解答

(a) 直流電源が接続された定常状態において，コンデンサに電流は流れないので

$$I_0 = 0 \text{ A}, \qquad Q_0 = CE_0 = 0.08\cdot 5 = 0.4 \text{ C}$$

(b) キルヒホッフの電圧則より

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = E_1$$

$i(t) = dq(t)/dt$ の関係を用いて

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E_1$$

与えられた値を代入すると

$$0.5\frac{d^2q(t)}{dt^2} + 3\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{0.08} = 15 \qquad \to \qquad \frac{d^2q(t)}{dt^2} + 6\frac{dq(t)}{dt} + 25q(t) = 30$$

(c) 定常解 $q_s(t)$ は $d/dt \to 0$ として

$$25q_s(t) = 30 \qquad \to \qquad q_s(t) = 1.2 \text{ C}$$

(d) 過渡解 $q_t(t)$ に対する微分方程式は

$$\frac{d^2q_t(t)}{dt^2} + 6\frac{dq_t(t)}{dt} + 25q_t(t) = 0$$

この解を $q_t(t) = Ae^{mt}$ と仮定すると，特性方程式は

$$m^2 + 6m + 25 = 0 \qquad \to \qquad (m+3)^2 + 4^2 = 0$$

となり，根は

$$m = -3 \pm j4$$

したがて t，$q_t(t)$ は以下のように書ける．

$$\begin{aligned}
q_t(t) &= A_1 e^{(-3+j4)t} + A_2 e^{(-3-j4)t} \\
&= e^{-3t}\left(A_1 e^{j4t} + A_2 e^{-j4t}\right) \\
&= e^{-3t}\left((A_1 + A_2)\cos 4t + j(A_1 - A_2)\sin 4t\right) \\
&= e^{-3t}\left(B_1 \cos 4t + B_2 \sin 4t\right) \qquad (B_1 = A_1 + A_2, \quad B_2 = j(A_1 - A_2))
\end{aligned}$$

(e) $q(t)$ の一般解は

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = 1.2 + e^{-3t}\left(B_1 \cos 4t + B_2 \sin 4t\right)$$

また，$i(t) = dq(t)/dt$ の関係を用いて

$$\begin{aligned}
i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} = -3e^{-3t}\left(B_1 \cos 4t + B_2 \sin 4t\right) + 4e^{-3t}\left(-B_1 \sin 4t + B_2 \cos 4t\right) \\
&= e^{-3t}\left\{(-3B_1 + 4B_2)\cos 4t + (-4B_1 - 3B_2)\sin 4t\right\}
\end{aligned}$$

初期条件として $t = 0$ で $q(0) = 0.4$，$i(0) = 0$ であることを用いると．

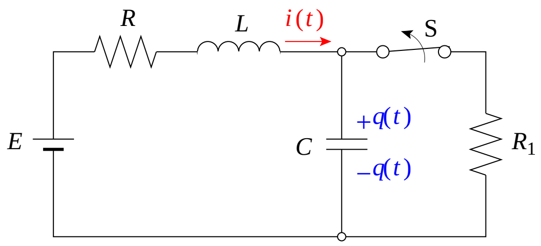
$$\begin{aligned}
&q(0) = 1.2 + B_1 = 0.4 \quad \rightarrow \quad B_1 = -0.8 \\
&i(0) = -3B_1 + 4B_2 = 0 \quad \rightarrow \quad B_2 = \frac{3}{4}B_1 = -0.6
\end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned}
&q(t) = 1.2 - e^{-3t}\left(0.8 \cos 4t + 0.6 \sin 2t\right) \ \mathrm{C} \\
&i(t) = 5e^{-3t} \sin 4t \ \mathrm{A}
\end{aligned}$$

小テスト

図に示す回路において，スイッチ S が接続された状態で十分な時間が経過した後，時刻 $t=0$ でスイッチ S 開いた．以下の問に答えなさい．なお，$R=1.5\ \Omega$，$R_1=3\ \Omega$，$L=0.25$ H，$C=0.5$ F，$E=9$ V とする．



(a) $t<0$ の定常状態でコンデンサ C に蓄えられている電荷 Q_0 とコイルに流れている電流 I_0 を求めよ．

(b) コンデンサ C に蓄えられる電荷を $q(t)$ とする．この $q(t)$ を用いて，$t>0$ における回路の微分方程式を示せ．

(c) 設問 (b) で求めた微分方程式に対する定常解 $q_s(t)$ を求めよ．

(d) 設問 (b) で求めた微分方程式に対する過渡解 $q_t(t)$ を求めよ．

(e) $t=0$ での初期条件を考慮して，$t>0$ においてコンデンサに蓄えられている電荷 $q(t)$ と流れている電流 $i(t)$ を求めよ．

解答

(a) コイルに流れる電流は

$$I_0 = \frac{E}{R+R_1} = \frac{9}{4.5} = 2\ \mathrm{A}$$

コンデンサにかかる電圧は

$$V_C = V_{R_1} = \frac{R_1}{R+R_1}E = \frac{3\cdot 9}{4.5} = 6\ \mathrm{V}$$

と求まるので，コンデンサに蓄えられている電荷は

$$Q_0 = CV_C = 0.5\cdot 6 = 3\ \mathrm{C}$$

(b) キルヒホッフの電圧則より

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = E$$

$i(t) = dq(t)/dt$ の関係を用いて

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E$$

与えられた値を代入すると

$$0.25\frac{d^2q(t)}{dt^2} + 1.5\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{0.5} = 9 \qquad \rightarrow \qquad \frac{d^2q(t)}{dt^2} + 6\frac{dq(t)}{dt} + 8q(t) = 36$$

(c) 定常解 $q_s(t)$ は $d/dt \rightarrow 0$ として

$$8q_s(t) = 36 \qquad \rightarrow \qquad q_s(t) = 4.5\ \mathrm{C}$$

(d) 過渡解 $q_t(t)$ に対する微分方程式は

$$\frac{d^2q_t(t)}{dt^2}+6\frac{dq_t(t)}{dt}+8q_t(t)=0$$

この解を $q_t(t)=Ae^{mt}$ と仮定すると，特性方程式は

$$m^2+6m+8=0 \qquad \rightarrow \qquad (m+2)(m+4)=0$$

となり，根は

$$m=-2, \quad -4$$

したがて t，$q_t(t)$ は以下のように書ける．

$$q_t(t) \quad = \quad A_1e^{-2t}+A_2e^{-4t}$$

(e) $q(t)$ の一般解は

$$q(t)=q_s(t)+q_t(t)=4.5+A_1e^{-2t}+A_2e^{-4t}$$

また，$i(t)=dq(t)/dt$ の関係を用いて

$$i(t) \quad = \quad \frac{dq(t)}{dt}=-2A_1e^{-2t}-4A_2e^{-4t}$$

初期条件として $t=0$ で $q(0)=3$，$i(0)=2$ であることを用いると

$$q(0)=4.5+A_1+A_2=3$$
$$i(0)=-2A_1-4A_2=2$$

この連立一次方程式を解くと

$$A_1=-2, \qquad A_2=0.5$$

したがって

$$q(t)=4.5-2e^{-2t}+0.5e^{-4t}\ \mathrm{C}$$
$$i(t)=4e^{-2t}-2e^{-4t}\ \mathrm{A}$$