電気回路演習 II 第 10 回 (平成 19 年 12 月 21 日 (金))

演習

以下の問に答よ．ただし，$R_0 = 0.5\,\Omega$，$R_1 = 1\,\Omega$，$R_2 = 2\,\Omega$，$C = \frac{1}{6}\,\mathrm{F}$，$E = 12\,\mathrm{V}$，$v(t) = 24\sin(2\sqrt{3}t)\,\mathrm{V}$ とする．ここに t は時間で単位は秒である．

(a) 図 1 の回路が定常状態にあるときコンデンサに蓄えられている電荷 Q_0 とコンデンサに流れている電流 I_0 を求めよ．

(b) 図 2 の回路が定常状態にあるときコンデンサに蓄えられている電荷 $q_s(t)$ とコンデンサに流れている電流 $i_s(t)$ を求めよ．

(c) 図 3 に示す回路において，スイッチ S を端子 a 側に接続して定常状態になった後，$t = 0$ でスイッチを端子 b 側に切り替える場合を考える (図 1 の状態から図 2 の状態に変化させる)．$t \geq 0$ においてコンデンサに蓄えられている電荷の時間変化 $q(t)$ とコンデンサに流れる電流の時間変化 $i(t)$ を求めよ．

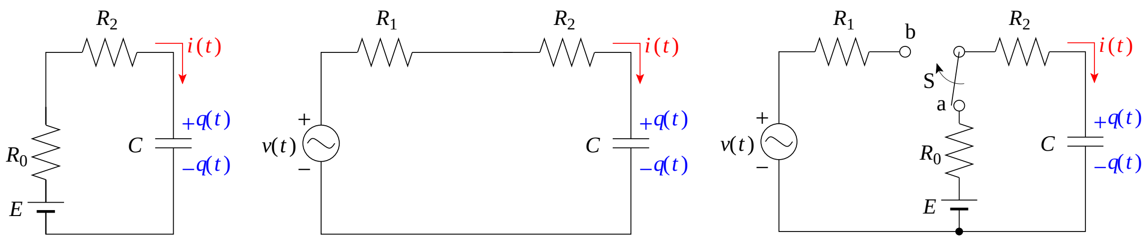

図 1　　図 2　　図 3

解答

(a) (直流の) 定常状態では抵抗，コンデンサに電流は流れていないので．

$$I_0 = 0\ \mathrm{A}, \qquad Q_0 = CE = \frac{1}{6}\cdot 12 = 2\ \mathrm{C}$$

(b) 電源の角周波数 $\omega = 2\sqrt{3}$ [rad/s] であることに注意して，交流回路理論より，複素電流は振幅表示で

$$I_s = \frac{24e^{j0}}{(R_1+R_2)+\frac{1}{j\omega C}} = \frac{24}{3-j\sqrt{3}} = \frac{24(3+j\sqrt{3})}{9+3} = 2(3+j\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}}\ [\mathrm{A}]$$

したがって，$e^{j\omega t} = e^{j2\sqrt{3}t}$ をかけて虚部を取ることで時間の関数に直すと $i_s(t)$ は以下のように求まる．

$$i_s(t) = 4\sqrt{3}\sin\left(2\sqrt{3}t + \frac{\pi}{6}\right)\ [\mathrm{A}]$$

また，コンデンサに蓄えられている電荷 $q_s(t)$ は以下のように求まる．

$$\begin{aligned} q_s(t) &= \int i(t)dt = \int 4\sqrt{3}\sin\left(2\sqrt{3}t+\frac{\pi}{6}\right)dt = 4\sqrt{3}\cdot\frac{-\cos\left(2\sqrt{3}t+\frac{\pi}{6}\right)}{2\sqrt{3}} = -2\cos\left(2\sqrt{3}t+\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2\sin\left(2\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)\ [\mathrm{C}] \end{aligned}$$

(c) スイッチを端子 b に切り換えた後の回路方程式はキルヒホッフの電圧則より以下のように書ける．

$$(R_1+R_2)i(t) + \frac{q(t)}{C} = v(t) = 24\sin(2\sqrt{3}t)$$

コンデンサに流れる電流は，電荷の時間変化として $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ と表されるので，これを代入すると，以下の微分方程式を得る．

$$(R_1+R_2)\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = v(t)$$

上式の定常解は，設問 (b) で求めており，過渡解 $q_t(t)$ は $v(t) \to 0$ として

$$(R_1 + R_2)\frac{dq_t(t)}{dt} + \frac{q_t(t)}{C} = 0$$

を解くことで，以下のように求まる．

$$q_t(t) = Ae^{-\frac{t}{C(R_1+R_2)}} = Ae^{-2t} \qquad (A \text{ は積分定数})$$

したがって，$q(t)$ は定常解と過渡解の和として以下のように求まる．

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = 2\sin\left(2\sqrt{3}t - \frac{\pi}{3}\right) + Ae^{-2t}$$

未知の定数 A を決めるために $t = 0$ での初期条件を考える．コンデンサに蓄えられている電荷は瞬時には変化しないので

$$q(0) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + A = Q_0 \qquad \to \qquad A = 2 + \sqrt{3}$$

以上より

$$q(t) = 2\sin\left(2\sqrt{3}t - \frac{\pi}{3}\right) + (2+\sqrt{3})e^{-2t} \text{ [C]}$$

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} = 4\sqrt{3}\cos\left(2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) - 2(2+\sqrt{3})e^{-2t} \text{ [A]} \\ &= 4\sqrt{3}\sin\left(2\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}\right) - 2(2+\sqrt{3})e^{-2t} \text{ [A]} \end{aligned}$$

小テスト

以下の問に答よ．ただし，$R_0 = 2\ \Omega$，$R_1 = 1\ \Omega$，$R_2 = 3\ \Omega$，$L = 2$ H，$E = 5$ V，$v(t) = 8\sin(2t)$ V とする．ここに t は時間で単位は秒である．

(a) 図 1 の回路が定常状態にあるときコイルに流れている電流 I_0 を求めよ．

(b) 図 2 の回路が定常状態にあるときコイルに流れている電流 $i_s(t)$ を求めよ．

(c) 図 3 に示す回路において，スイッチ S を端子 a 側に接続して定常状態になった後，$t = 0$ でスイッチを端子 b 側に切り替える場合を考える (図 1 の状態から図 2 の状態に変化させる)．$t \geq 0$ においてコイルに流れる電流の時間変化 $i(t)$ を求めよ．

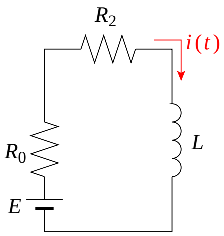

図 1

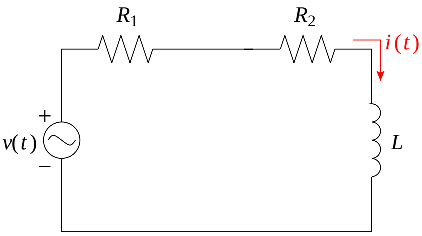

図 2

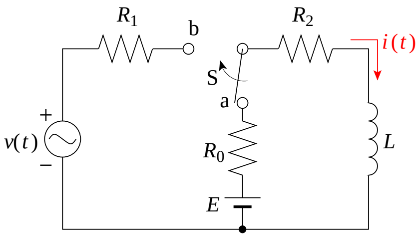

図 3

解答

(a) (直流の) 定常状態ではコイルでの電圧降下はないので

$$I_0 = \frac{E}{R_0 + R_2} = \frac{5}{2+3} = 1\ \text{A}$$

(b) 電源の角周波数 $\omega = 2$ [rad/s] であることに注意して，交流回路理論より，複素電流は振幅表示で

$$I_s = \frac{8e^{j0}}{R_1 + R_2 + j\omega L} = \frac{8}{4 + j4} = 1 - j = \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\ [\text{A}]$$

したがって，$e^{j\omega t} = e^{j2t}$ をかけて虚部を取ることで時間の関数に直すと $i(t)$ は以下のように求まる．

$$i_s(t) = \sqrt{2}\sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)\ \ [\text{A}]$$

(c) スイッチを端子 b に切り換えた後の回路方程式はキルヒホッフの電圧則より以下のように書ける．

$$L\frac{di(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i(t) = v(t) = 8\sin(2t)$$

上式の定常解は，設問 (b) で求めており，過渡解 $i_t(t)$ は $v(t) \to 0$ として

$$L\frac{di_t(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i_t(t) = 0$$

を解くことで，以下のように求まる．

$$i_t(t) = Ae^{-\frac{R_1+R_2}{L}t} = Ae^{-2t} \qquad (A\ は積分定数)$$

したがって，$i(t)$ は定常解と過渡解の和として以下のように求まる．

$$i(t) = i_s(t) + i_t(t) = \sqrt{2}\sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) + Ae^{-2t}$$

未知の定数 A を決めるために $t = 0$ での初期条件を考える．コイルに流れている電流は不連続には変化しないので

$$i(0) = \sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + A = I_0 \qquad \to \qquad A = 1 + 1 = 2$$

以上より

$$i(t) = \sqrt{2}\sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) + 2e^{-2t}\ [\text{A}]$$