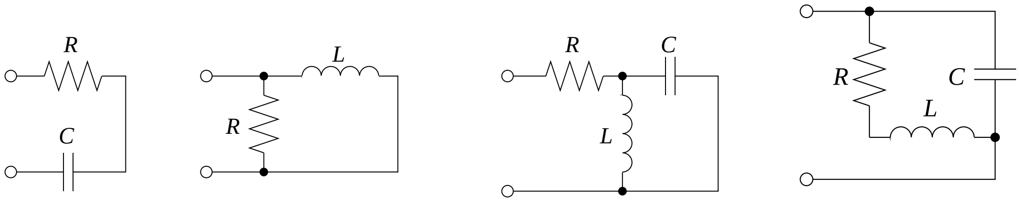
電気回路演習 II 第 1 回 (平成 19 年 10 月 5 日 (金))

演習

下図の 4 つの回路に対して，以下の問に答よ．ただし，周波数を 50 Hz，$R = 2\ \Omega$，$L = \frac{40}{\pi}$ mH，$C = \frac{1}{300\pi}$ F とする．

1. 図 (a)〜(d) の回路の合成インピーダンスを複素数の直角座標表現で求めよ．
2. 図 (b) の回路に実効値 $V = 10$ V，位相角 0°，周波数 50 Hz の交流電圧源を接続するとき，回路全体の実効電力 P，皮相電力 P_a，無効電力 P_r，力率 $\cos\phi$ をそれぞれ求めよ．
3. 図 (c) の回路に，実効値 $V = 7.4$ V，位相角 0°，周波数 50 Hz の交流電圧源を接続するとき，各素子 R，L，C に流れる電流の複素表現 I_R，I_L，I_C を求めよ．
4. 図 (d) の回路で，回路に並列にコイル L_0 を接続して全体の力率を 1 にしたい．L_0 の値を求めよ．



(a)　(b)　(c)　(d)

解答

1. 抵抗 R，コイル L，コンデンサ C のインピーダンスをそれぞれ Z_R，Z_L，Z_C とすると

$$
\begin{aligned}
Z_R &= 2\ \Omega \\
Z_L &= j\omega L = j2\pi fL = j2\pi \times 50 \times \frac{40}{\pi} \times 10^{-3} = j4\ \Omega \\
Z_C &= \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2\pi fC} = \frac{1}{j2\pi \times 50 \times \frac{1}{300\pi}} = \frac{3}{j} = -j3\ \Omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_a &= Z_R + Z_C = 2 - j3\ \Omega \quad \boxed{15} \\
Z_b &= (Z_R // Z_L) = \frac{Z_R Z_L}{Z_R + Z_L} = \frac{2 \cdot j4}{2 + j4} == \frac{j4}{1 + j2} = \frac{j4 \cdot (1 - j2)}{1^2 + 2^2} = \frac{4}{5}(2 + j)\ \Omega \quad \boxed{15} \\
Z_c &= Z_R + (Z_C // Z_L) = Z_R + \frac{Z_C Z_L}{Z_C + Z_L} = 2 + \frac{-j3 \cdot j4}{-j3 + j4} = 2 + \frac{12}{j} = 2 - j12\ \Omega \quad \boxed{15} \\
Z_d &= Z_C // (Z_R + Z_L) = \frac{Z_C (Z_R + Z_L)}{Z_C + Z_R + Z_L} = \frac{-j3 \cdot (2 + j4)}{-j3 + 2 + j4} = \frac{6(2 - j)}{2 + j} = \frac{6(2 - j)(2 - j)}{2^2 + 1^2} \\
&= \frac{6}{5}(3 - j4)\ \Omega \quad \boxed{15}
\end{aligned}
$$

2. 図 (b) の回路の複素電力 P_c を求めると

$$
P_c = \frac{|V|^2}{Z_b} = \frac{10^2}{\frac{4}{5}(2 + j)} = \frac{500(2 - j)}{4(2^2 + 1^2)} = 25(2 - j) = 50 - j25
$$

したがって，実効電力 P，無効電力 P_r，皮相電力 P_a，力率 $\cos\phi$ は

$$
P = \mathrm{Re}(P_c) = 50\ \mathrm{W}, \boxed{5} \quad P_r = \mathrm{Im}(P_c) = -25\ \mathrm{Var}, \boxed{5} \quad P_a = |P_c| = 25\sqrt{2^2 + 1^2} = 25\sqrt{5}\ \mathrm{VA}, \boxed{5}
$$

$$
\cos\phi = \frac{P}{P_a} = \frac{50}{25\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (\text{遅れ}) \boxed{5}
$$

3. 抵抗 R に流れる電流は回路に流れる全電流に等しいので

$$I_R = \frac{7.4}{2-j12} = \frac{3.7}{1-j6} = \frac{3.7(1+j6)}{1+6^2} = 0.1 + j0.6 \text{ A} \quad \boxed{5}$$

C と L には I_R が分かれて流れるので，コンデンサとコイルのそれぞれのアドミタンスを Y_C，Y_L として

$$\begin{aligned} I_C &= \frac{Y_C}{Y_C+Y_L} I_R = \frac{Z_L}{Z_C+Z_L} I_R = \frac{j4}{-j3+j4} I_R = 4I_R = 0.4 + j2.4 \text{ A} \quad \boxed{5} \\ I_L &= \frac{Y_L}{Y_C+Y_L} I_R = \frac{Z_C}{Z_C+Z_L} I_R = \frac{-j3}{-j3+j4} I_R = -3I_R = -0.3 - j1.8 \text{ A} \quad \boxed{5} \end{aligned}$$

4. 図 (d) の回路の合成アドミタンスは

$$Y_d = \frac{1}{Z_d} = \frac{5}{6(3-j4)} = \frac{5(3+j4)}{6(3^2+4^2)} = \frac{3+j4}{30} \text{ S}$$

コイル L_0 を並列に接続して合成のアドミタンスが実数になれば良いので

$$Y_d + \frac{1}{j\omega L_0} = \frac{3+j4}{30} - j\frac{1}{100\pi \cdot L_0} = \frac{1}{10} + j\left(\frac{4}{30} - \frac{1}{100\pi \cdot L_0}\right)$$

上式の虚部を 0 に置くと

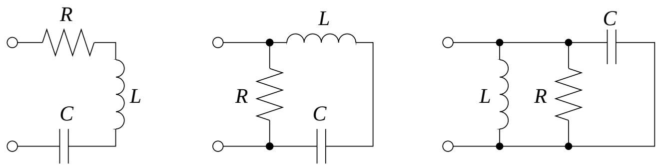
$$L_0 = \frac{30}{400\pi} = \frac{3}{40\pi} \text{ H} \quad \boxed{5}$$

その他の採点基準	
単位の無いもの：	**1点減点**
力率の進みか遅れかを明記しないもの：	**1 点減点**
解法がわかっていると思われるもの：	**60%程度の点数を与える (15 → 10，5 → 3)**

小テスト

下図の 4 つの回路に対して，以下の問に答よ．ただし，$R = 2\ \Omega$，$L = \frac{1}{50\pi}$ H，$C = \frac{1}{400\pi}$ F とする．

1. 図 (a)〜(c) の回路の合成インピーダンスを複素数の直角座標表現で求めよ．ただし，周波数を 50 Hz とする．
2. 図 (a) の回路に実効値 $V = 10$ V，位相角 0°，周波数 50 Hz の交流電圧源を接続するとき，回路全体の実効電力 P，皮相電力 P_a，無効電力 P_r，力率 $\cos\phi$ をそれぞれ求めよ．
3. 図 (b) の回路に，実効値 $V = 8$ V，位相角 0°，周波数 50 Hz の交流電圧源を接続するとき，各素子 R，L，C に流れる電流の複素表現 I_R，I_L，I_C を求めよ．
4. 図 (c) の回路で，全体の力率が 1 になる周波数 f とそのときの回路のインピーダンスを求めよ．



(a)　(b)　(c)

解答

1. 抵抗 R，コイル L，コンデンサ C のインピーダンスをそれぞれ Z_R，Z_L，Z_C とすると

$$
\begin{aligned}
Z_R &= 2\ \Omega \\
Z_L &= j\omega L = j2\pi f L = j2\pi \times 50 \times \frac{1}{50\pi} = j2\ \Omega \\
Z_C &= \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2\pi f C} = \frac{1}{j2\pi \times 50 \times \frac{1}{400\pi}} = \frac{4}{j} = -j4\ \Omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_a &= Z_R + Z_L + Z_C = 2 + j2 - j4 = 2 - j2\ \Omega\ \boxed{15} \\
Z_b &= Z_R // (Z_L + Z_C) = \frac{Z_R(Z_L + Z_C)}{Z_R + Z_L + Z_C} = \frac{2(j2 - j4)}{2 + j2 - j4} = \frac{-j4}{2 - j2} = \frac{-j2}{1 - j} = \frac{-j2(1 + j)}{1^2 + 1^2} \\
&= -j(1 + j) = 1 - j\ \Omega\ \boxed{15} \\
Z_c &= \left(\frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{j2} + \frac{1}{-j4}\right)^{-1} = \left(\frac{2 - j}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{2 - j} = \frac{4(2 + j)}{2^2 + 1^2} \\
&= \frac{8 + j4}{5}\ \Omega\ \boxed{15}
\end{aligned}
$$

2. 図 (a) の回路の複素電力 P_c を求めると

$$
P_c = \frac{|V|^2}{Z_a} = \frac{10^2}{2 - j2} = \frac{50}{1 - j} = \frac{50(1 + j)}{1^2 + 1^2} = 25(1 + j) = 25 + j25\ \boxed{5}
$$

(ただし、以下ができていれば、この値がなくても＋５点)

したがって，実効電力 P，無効電力 P_r，皮相電力 P_a，力率 $\cos\phi$ は

$$
\begin{aligned}
&P = \mathrm{Re}(P_c) = 25\ \mathrm{W},\ \boxed{5}\quad P_r = \mathrm{Im}(P_c) = 25\ \mathrm{Var},\ \boxed{5} \\
&P_a = |P_c| = 25|1 + j| = 25\sqrt{1^2 + 1^2} = 25\sqrt{2}\ \mathrm{VA},\ \boxed{5} \\
&\cos\phi = \frac{P}{P_a} = \frac{25}{25\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\quad (\text{進み})\ \boxed{5}
\end{aligned}
$$

3. 図 (b) より $I_L = I_C$ であり，抵抗 R と LC 直列回路の両端にそれぞれ電源電圧がかかることになるので

$$
\begin{aligned}
I_R &= \frac{8}{Z_R} = \frac{8}{2} = 4\ \mathrm{A}\ \boxed{10} \\
I_L &= I_C = \frac{8}{Z_L + Z_C} = \frac{8}{j2 - j4} = j4\ \mathrm{A}\ \boxed{10}
\end{aligned}
$$

4. 角周波数を ω とすると，図 (c) の回路の合成アドミタンス Y_c は

$$Y_c = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

力率が 1 になるのはアドミタンス Y_c の虚部が 0 のときなので

$$\omega C = \frac{1}{\omega L} \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{CL}} = 100\sqrt{2}\pi \ \boxed{5}$$

したがって

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 50\sqrt{2}\ \mathrm{Hz}$$

このとき回路のインピーダンスは

$$Z_c = \frac{1}{Y_c} = R = 2\ \Omega \ \boxed{5}$$

その他の採点基準
単位の無いもの： **1点減点**
力率の進みか遅れかを明記しないもの： **1 点減点**
解法がわかっていると思われるもの： **60%程度の点数を与える**
(15 → 10, 10, →6, 5 → 3)