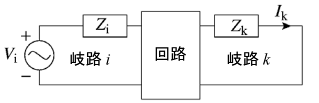
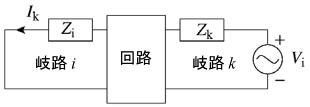
可逆(相反)定理

岐路 i に電圧源 V_i ⟶ 岐路 k に電流 I_k が流れた



岐路 i に電流 I_k が流れる ⟵ 岐路 k に電圧源 V_i



相反の定理の証明

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$$

i 番目の閉路に電圧源 V_i を挿入したとき

岐路 k の電流

$$I_k = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & 0 & \cdots & Z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{i1} & \cdots & V_i & \cdots & Z_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & Z_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} V_i$$

k 列　i 行

k 番目の閉路に電圧源 V_k を挿入したとき

岐路 i の電流

$$I_i = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & 0 & \cdots & Z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{k1} & \cdots & V_k & \cdots & Z_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & Z_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\Delta_{ki}}{\Delta} V_k$$

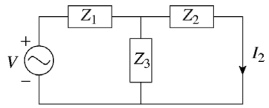
i 列　k 行

対称性 $\Delta_{ik} = \Delta_{ki}$

$$\frac{I_k}{V_i} = \frac{I_i}{V_k}$$

例題)

下図の回路でインピーダンス Z_1 の岐路に電圧源 V を接続したとき、Z_2 の岐路に電流 I_2 が流れた。このとき相反定理が成り立つことを確かめよ。



解答)　問題図の回路で

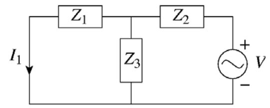
$$I_2 = \frac{V}{Z_1 + (Z_2 // Z_3)} \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} V$$

右下図の回路で

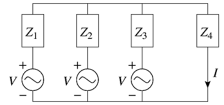
$$I_1 = \frac{V}{Z_3 + (Z_1 // Z_2)} \frac{Z_3}{Z_1 + Z_3} = \frac{Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} V$$

以上より

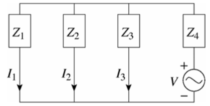
$$I_1 = I_2$$



例題)　次の回路の Z_4 に流れる電流を相反定理を利用して求めよ



解答)　下図のように電圧源を置き電流 I_1, I_2, I_3 を求めると, 求める電流は $I = I_1 + I_2 + I_3$ と求まる



$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{V}{Z_4 + \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right)^{-1}}$$

$$= \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_2 Z_3 Z_4 + Z_3 Z_4 Z_1 + Z_4 Z_1 Z_2} V$$

回路の双対性

閉路方程式

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

節点方程式

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$$

I と V, Z と Y を入れ替えても同様な関係が成り立つ

双対性

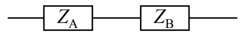
双対なパラメータ

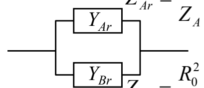
電圧	電流
インピーダンス	アドミタンス
R	G
L	C
電圧源	電流源
短絡	開放
閉路	節点

双対な法則

電圧則	電流則
Zの直列	Yの並列
閉路方程式	節点方程式
直列回路の電圧分配	並列回路の電流分配
テブナンの定理	ノルトンの定理

直列回路の逆回路





$$Z_{Ar} = \frac{R_0^2}{Z_A} \qquad Z_{Br} = \frac{R_0^2}{Z_B}$$

$$Z = Z_A + Z_B \longrightarrow Z_r = \frac{R_0^2}{Z} = \frac{R_0^2}{Z_A + Z_B}$$

$$Y_r = \frac{Z_A + Z_B}{R_0^2} = \frac{Z_A}{R_0^2} + \frac{Z_B}{R_0^2} = Y_{Ar} + Y_{Br}$$

簡単な回路の逆回路

逆回路

$Z_1 \cdot Z_2 = R_0^2$ $\longrightarrow$ Z_1 と Z_2 は R_0 に関して互いに逆回路である

$ab = 1$　　a と b は互いに逆数

$[A][B] = [I]$　　$[A]$ と $[B]$ は互いに逆行列

逆回路の関係

抵抗　$R \rightarrow G_r = \dfrac{R}{R_0^2}$　$\left(R_r = \dfrac{R_0^2}{R} \right)$

コイル　$L \rightarrow C_r = \dfrac{L}{R_0^2}$

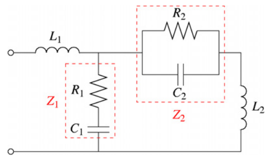
コンデンサ　$C \rightarrow L_r = CR_0^2$

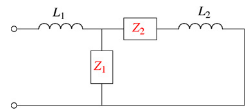
直列接続 ⇔ 並列接続

$$(j\omega L) \cdot Z_r = R_0^2 \rightarrow Z_r = \frac{1}{j\omega\left(L/R_0^2\right)} = \frac{1}{j\omega C_r} \longrightarrow C_r = \frac{L}{R_0^2}$$

$$\left(\frac{1}{j\omega C}\right) \cdot Z_r = R_0^2 \rightarrow Z_r = j\omega\left(CR_0^2\right) = j\omega L_r \longrightarrow L_r = CR_0^2$$

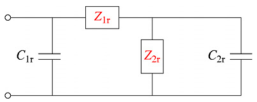
逆回路の求め方 (1)



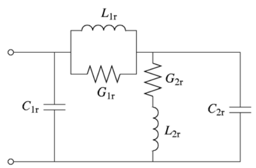


逆回路

直列枝を並列枝に



$$C_{1r} = \frac{L_1}{R_0^2}, \quad C_{2r} = \frac{L_2}{R_0^2}$$

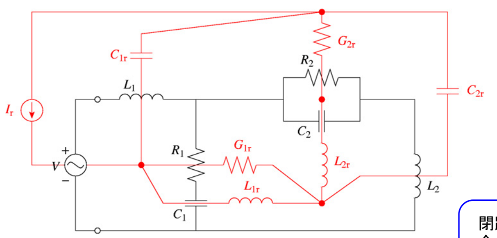


$$C_{1r} = \frac{L_1}{R_0^2}, \quad C_{2r} = \frac{L_2}{R_0^2}$$

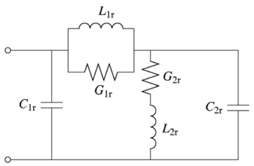
$$L_{1r} = C_1 R_0^2, \quad L_{2r} = C_2 R_0^2$$

$$G_{1r} = \frac{R_1}{R_0^2}, \quad G_{2r} = \frac{R_2}{R_0^2}$$

逆回路の求め方 (2)



閉路内に節点を作り
全ての素子を通るように
節点を接続する



$$C_{1r} = \frac{L_1}{R_0^2}, \quad C_{2r} = \frac{L_2}{R_0^2}$$

$$L_{1r} = C_1 R_0^2, \quad L_{2r} = C_2 R_0^2$$

$$G_{1r} = \frac{R_1}{R_0^2}, \quad G_{2r} = \frac{R_2}{R_0^2}$$