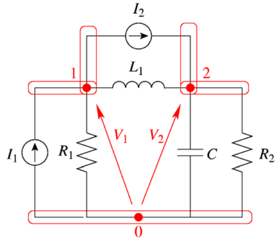
節点方程式

解析手順

- 回路の節点を設定 (一つは基準節点とする)
- 基準節点に対する節点電位を設定する
- キルヒホッフの電流則より各節点の方程式を立てる
- 方程式を連立させて節点電位を求める



節点方程式

$$I_1 - I_2 = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1 - V_2}{j\omega L_1}$$

$$I_2 = \frac{V_2 - V_1}{j\omega L_1} + \frac{V_2}{R_2} + j\omega C V_2$$

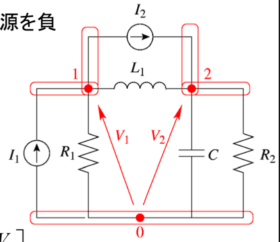
節点行列

$$\begin{bmatrix} I_1 - I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L_1} & -\frac{1}{j\omega L_1} \\ -\frac{1}{j\omega L_1} & \frac{1}{R_1} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

節点方程式の簡便な立て方

1. 各節点に流れ込む電流源を正、流れ出す電流源を負として、その和を左辺ベクトルとする

$$\begin{bmatrix} I_1 - I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} =$$



2. 各節点に接続する素子のアドミタンスの和を（正符号として）対角成分とする

$$\begin{bmatrix} I_1 - I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L_1} & ? \\ ? & \frac{1}{R_1} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

3. 節点間にある素子のアドミタンスを（負符号として）対応する非対角成分に書く

$$\begin{bmatrix} I_1 - I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L_1} & -\frac{1}{j\omega L_1} \\ -\frac{1}{j\omega L_1} & \frac{1}{R_1} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

節点行列の一般的な形

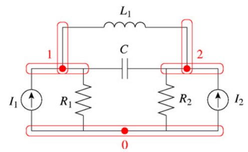
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$$

（既知の）駆動電流　　（未知の）節点電位

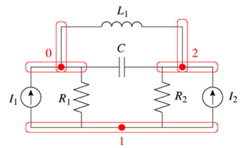
閉路行列の特徴

- 対称行列
  $Y_{ij} = Y_{ji}$
- 対角成分は正、非対角成分は負または零
  $Y_{ii} > 0, \quad Y_{ij(i \neq j)} \leq 0$
- 対角成分はその行の非対角成分の総和の大きさよりも大きい
  $Y_{ii} \geq -\sum_{i \neq j} Y_{ij}$
- 方程式の数（行列のサイズ）は（節点の数－1）に等しい

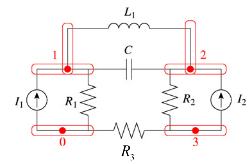
例題）次の回路の節点方程式を立てよ



$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L_1} & -j\omega C - \frac{1}{j\omega L_1} \\ -j\omega C - \frac{1}{j\omega L_1} & \frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

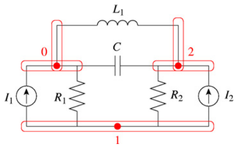


$$\begin{bmatrix} -I_1 - I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} & -j\omega C - \frac{1}{j\omega L} & 0 \\ -j\omega C - \frac{1}{j\omega L} & \frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

例題）次の回路の節点電位を求めよ



$R_1 = R_2 = 1\,\Omega$

$C = \dfrac{1}{50\pi}$ F, $L = \dfrac{1}{100\pi}$ H

$f = 50$ Hz, $I_1 = 1$ A, $I_1 = 1$ A

$$\begin{bmatrix} -I_1 - I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} & -\dfrac{1}{R_2} \\ -\dfrac{1}{R_2} & \dfrac{1}{R_2} + j\omega C + \dfrac{1}{j\omega L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

数値を代入すると

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1+j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

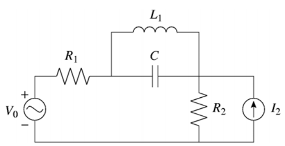
行列式の値は

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1+j \end{vmatrix} = 2(1+j) - (-1)^2 = 1 + j2$$

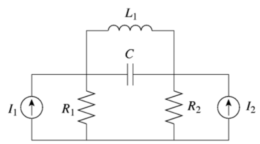
$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1+j \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-(1+j2)}{1+j2} = -1 \text{ V}$$

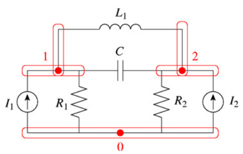
$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{0}{1+j2} = 0 \text{ V}$$

例題）次の回路の節点電位を求めよ (電圧源を含む場合)



ノルトンの定理を用いて電圧源を電流源に変換





$I_1 = \dfrac{V_0}{R_1}$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{V_0}{R_1} \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} + j\omega C + \dfrac{1}{j\omega L_1} & -j\omega C - \dfrac{1}{j\omega L_1} \\ -j\omega C - \dfrac{1}{j\omega L_1} & \dfrac{1}{R_2} + j\omega C + \dfrac{1}{j\omega L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$