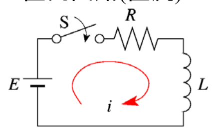
ラプラス変換を利用した過渡現象解析

1) RL直列回路(直流)



初期条件

$t=0$ で $i(t)=i(0)=i_0$

回路方程式(閉路方程式)

$$L\frac{di}{dt}+Ri=Eu(t)$$

⬇ ラプラス変換

$$L\{sI(s)-i(0)\}+RI(s)=\frac{E}{s}$$

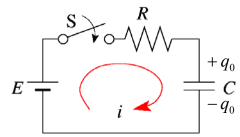
⬇

$$I(s)=\frac{sLi_0+E}{s(sL+R)}=\frac{\frac{E}{R}}{s}+\frac{i_0-\frac{E}{R}}{s+\frac{R}{L}}$$

ラプラス逆変換 ➡

$$i(t)=\frac{E}{R}+\left(i_0-\frac{E}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t}$$

2) RC直列回路(直流)



初期条件

$t=0$ で $q(t)=q(0)=q_0$

回路方程式(閉路方程式)

$$Ri+\frac{q}{C}=Eu(t) \xrightarrow[q(t)=\int i(t)dt]{} Ri+\frac{1}{C}\int idt=Eu(t)$$

⬇ ラプラス変換

$$RI(s)+\frac{1}{C}\left\{\frac{I(s)}{s}+\frac{1}{s}\int idt\Big|_{t=0}\right\}=\frac{E}{s}$$

$$q(0)=q_0$$

⬇

$$\left(R+\frac{1}{sC}\right)I(s)+\frac{q_0}{sC}=\frac{E}{s}$$

微分方程式を直接解く

$$L\frac{di}{dt}+Ri=Eu(t)$$

定常解 $i_s(t)=\dfrac{E}{R}$

過渡解 $i_t(t)=Ae^{-\frac{R}{L}t}$

➡ 一般解

$$i(t)=\frac{E}{R}+Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

⬇ 初期条件 $i(0)=i_0$

$$i_0=\frac{E}{R}+A \longrightarrow A=i_0-\frac{E}{R}$$

以上より

$$i(t)=\frac{E}{R}+\left(i_0-\frac{E}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$I(s)=\frac{CE-q_0}{sCR+1}=\frac{\frac{1}{R}\left(E-\frac{q_0}{C}\right)}{s+\frac{1}{CR}}$$

ラプラス逆変換 ➡

$$i(t)=\frac{1}{CR}(CE-q_0)e^{-\frac{t}{CR}}$$

微分方程式を直接解く

$$Ri+\frac{q}{C}=Eu(t) \longrightarrow R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=Eu(t)$$

定常解 $q_s(t)=CE$

過渡解 $q_t(t)=Ae^{-\frac{t}{CR}}$

➡ 一般解

$$q(t)=CE+Ae^{-\frac{t}{CR}}$$

⬇ 初期条件 $q(0)=q_0$

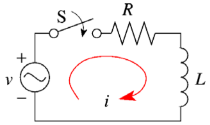
$$q_0=CE+A \longrightarrow A=q_0-CE$$

以上より

$$q(t)=CE-(CE-q_0)e^{-\frac{t}{CR}}$$

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}=\frac{1}{CR}(CE-q_0)e^{-\frac{t}{CR}}$$

3) RL直列回路(交流)



初期条件

$t=0$ で $i(t)=i(0)=0$

$$v=13\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)\ [\mathrm{V}]$$

$$R=\sqrt{2}\ \Omega,\ L=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \mathrm{H}$$

$$L\frac{di}{dt}+Ri=v \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{di}{dt}+\sqrt{2}i=13\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{13}{\sqrt{2}}(\sin 3t+\cos 3t)$$

$$\frac{di}{dt}+2i=13(\sin 3t+\cos 3t)$$

⬇ ラプラス変換

$$\{sI(s)-i(0)\}+2I(s)=13\cdot\left(\frac{s+3}{s^2+3^2}\right)$$

⬇

$$I(s)=\frac{13\cdot(s+3)}{(s^2+3^2)(s+2)}=\frac{-s+5\cdot 3}{s^2+3^2}+\frac{1}{s+2}$$

⬇

$$i(t)=-\cos 3t+5\sin 3t+e^{-2t}$$

一般解

$$i(t)=i_s(t)+i_t(t)=5\sin 3t-\cos 3t+Ae^{-2t}$$

⬇ 初期条件 $i(0)=0$

$$i(0)=-1+A=0 \longrightarrow A=1$$

よって

$$i(t)=i_s(t)+i_t(t)=5\sin 3t-\cos 3t+e^{-2t}\ [\mathrm{A}]$$

微分方程式を直接解く

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{di}{dt}+\sqrt{2}i=13\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)$$

定常解

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{di_s}{dt}+\sqrt{2}i_s=13\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)$$

⬇

$$\frac{j3}{\sqrt{2}}I_s+\sqrt{2}I_s=13e^{\pi/4}$$

⬇

$$I_s=\frac{13\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}(2+j3)}=\frac{13(1+j)}{2+j3}=(1+j)(2-j3)=5-j$$

⬇

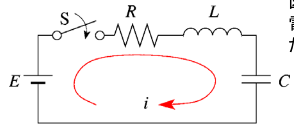
$$i_s(t)=\mathrm{Im}\left[(5-j)e^{j3t}\right]=\mathrm{Im}\left[(5-j)(\cos 3t+j\sin 3t)\right]=5\sin 3t-\cos 3t$$

過渡解

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{di_t}{dt}+\sqrt{2}i_t=0$$

⬇

$$i_t(t)=Ae^{-2t}$$



図の回路で時刻 t=0 にスイッチが閉じた後の電流の時間変化をラプラス変換を用いて求めよ。ただし、$t<0$ ではコンデンサに電荷はないものとする。

(a) $E=8\,\mathrm{V},\ R=5\,\Omega,\ L=1\,\mathrm{H},\ C=\frac{1}{4}\,\mathrm{F}$

(c) $E=8\,\mathrm{V},\ R=2\,\Omega,\ L=1\,\mathrm{H},\ C=\frac{1}{4}\,\mathrm{F}$

回路方程式(節点方程式)

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int idt=Eu(t)$$

⬇ ラプラス変換

$$L\{sI(s)-i(0)\}+RI(s)+\frac{1}{C}\left\{\frac{I(s)}{s}+\frac{1}{s}\int idt\Big|_{t=0}\right\}=\frac{E}{s}$$

$$\left(Ls^2+Rs+\frac{1}{C}\right)I(s)=E$$

(a) の場合

$$\left(s^2+5s+4\right)I(s)=8 \longrightarrow I(s)=\frac{8}{(s+1)(s+4)}$$

$$i(t)=(s+1)I(s)e^{st}\Big|_{s=-1}+(s+4)I(s)e^{st}\Big|_{s=-4}=\frac{8}{s+4}e^{st}\Big|_{s=-1}+\frac{8}{s+1}I(s)e^{st}\Big|_{s=-4}$$

$$=\frac{8}{3}\left(e^{-t}-e^{-4t}\right)\ [\mathrm{A}]$$

(c) の場合

$$\left(s^2+2s+4\right)I(s)=8 \longrightarrow I(s)=\frac{\left(8/\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3}}{(s+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$i(t)=\frac{8}{\sqrt{3}}e^{-t}\sin\sqrt{3}t=\frac{8}{3}\sqrt{3}e^{-t}\sin\sqrt{3}t\ [\mathrm{A}]$$