ラプラス変換による過渡現象解析

$f(t)$ の微分方程式 —ラプラス変換→ $F(s)$ の代数方程式

$f(t)$ の微分方程式 —直接解法→ 解 $f(t)$

$F(s)$ の代数方程式 —代数計算→ 解 $F(s)$　(計算が簡単!)

解 $F(s)$ —ラプラス逆変換→ 解 $f(t)$

RL 直列回路

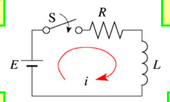
回路方程式

$$L\frac{di}{dt}+Ri=Eu(t)$$

ラプラス変換

s の代数方程式

$$L\{sI(s)-i(0)\}+RI(s)=\frac{E}{s}$$



代数計算

$t=0$ で $i=0$

$$I(s)=\frac{E}{s(sL+R)}=\frac{E}{R}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s+R/L}\right)$$

ラプラス逆変換

$$i(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

基本的な関数のラプラス変換

・ステップ関数

$$\mathcal{L}\{u(t-T)\}=\int_0^\infty u(t-T)e^{-st}dt=\int_T^\infty e^{-st}dt=\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_T^\infty=\frac{e^{-Ts}}{s}$$

・インパルス関数

$$\mathcal{L}\{u_0(t)\}=\int_0^\infty u_0(t)e^{-st}dt=e^0=1$$

・単位ランプ関数 $f(t)=t$

$$\mathcal{L}\{t\}=\int_0^\infty te^{-st}dt=\left[-\frac{te^{-st}}{s}\right]_0^\infty+\int_0^\infty\frac{e^{-st}}{s}dt=\left[-\frac{te^{-st}}{s^2}\right]_0^\infty=\frac{1}{s^2}$$

ラプラス変換の諸定理

・積分定理

$$f(t)=\int i(t)dt \quad\rightarrow\quad i(t)=\frac{df(t)}{dt}$$

$$\mathcal{L}\{i(t)\}=\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\}=s\mathcal{L}\{f(t)\}-f(0) \quad\rightarrow\quad \mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{s}\left(\mathcal{L}\{i(t)\}+f(0)\right)$$

$$\mathcal{L}\left\{\int i(t)dt\right\}=\frac{1}{s}\left(I(s)+\int i(t)dt\Big|_{t=0}\right)$$

ラプラス変換と逆変換

ラプラス変換

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

ラプラス逆変換

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds$$

フーリエ変換： $e^{j\omega t}$ に分解

ラプラス変換： $e^{st}=e^{\sigma t}e^{j\omega t}$ に分解

(時間とともに振幅が増大する周波数)

$t\rightarrow\infty$ まで続く解にも適用可能

ステップ関数 $u(t)$

$$\mathcal{L}\{u(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}dt=\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty=\frac{1}{s}$$

関数の微分 $di(t)/dt$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{di(t)}{dt}\right\}=\int_0^\infty\frac{di(t)}{dt}e^{-st}dt=\left[i(t)e^{-st}\right]_0^\infty+s\int_0^\infty i(t)e^{-st}dt=sI(s)-i(0)$$

関数 $f(t)=e^{-at}$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\}=\int_0^\infty e^{-at}e^{-st}dt=\left[-\frac{1}{s+a}e^{-(st+a)}\right]_0^\infty=\frac{1}{s+a}\longrightarrow\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\}=e^{-at}$$

ラプラス逆変換

(a) ラプラス変換表とラプラス変換に関する諸定理の利用

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2+5s+1}{s+3}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{2s-1+\frac{4}{s+3}\right\}=2\mathcal{L}^{-1}\{s\}-\mathcal{L}^{-1}\{1\}+4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}$$

$$=2\frac{du_0(t)}{dt}-u_0(t)+e^{-3t}u(t)$$

(b) 部分分数展開　～ 有理関数の逆ラプラス変換

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{(s+1)(s+3)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+3}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}+2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}=e^{-t}+e^{-3t}$$

$$\frac{3s+5}{(s+1)(s+3)}=\frac{K_1}{s+1}+\frac{K_2}{s+3}=\frac{K_1(s+3)+K_2(s+1)}{(s+1)(s+3)}=\frac{(K_1+K_2)s+(3K_1+K_2)}{(s+1)(s+3)}$$

係数比較

$$K_1+K_2=3$$
$$3K_1+K_2=5$$

$$\Rightarrow\quad K_1=1,\quad K_2=2$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+3}{(s+3)^2(s+4)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{3}{(s+3)^2}+\frac{5}{s+3}-\frac{5}{s+4}\right\}$$

$$=-3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2}\right\}+5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}-5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}=-3te^{-3t}+5e^{-3t}-5e^{-4t}$$

部分分数展開の方法

$$F(s)=\frac{3s+4}{(s+a)(s+b)}=\frac{K_1}{s+a}+\frac{K_2}{s+b} \longrightarrow f(t)=K_1e^{-at}+K_2e^{-bt}$$

$$(s+a)F(s)=K_1+\frac{s+a}{s+b}K_2 \xrightarrow{s=-a} (s+a)F(s)\big|_{s=-a}=K_1$$

同様に

$$(s+b)F(s)\big|_{s=-b}=K_2$$

ところで

$$f(t)=(s+a)F(s)\big|_{s=-a}e^{-at}+(s+b)F(s)\big|_{s=-b}e^{-bt}$$

$$=(s+a)F(s)e^{st}\big|_{s=-a}+(s+b)F(s)e^{st}\big|_{s=-b}$$

(c) 逆変換積分演算

$$f(t)=\frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}\left\{(s-s_1)^r F(s)e^{st}\right\}\Big|_{s=s_1}$$

$r=1$ のとき

$$f(t)=(s-s_1)F(s)e^{st}\big|_{s=s_1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{(s+1)(s+3)}\right\}=\frac{3s+5}{(s+3)}e^{st}\Big|_{s=-1}+\frac{3s+5}{(s+1)}e^{st}\Big|_{s=-3}=e^{-t}+2e^{-3t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+3}{(s+3)^2(s+4)}\right\}=\frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}}\left\{\frac{2s+3}{s+4}e^{st}\right\}\Big|_{s=-3}+\frac{2s+3}{(s+3)^2}e^{st}\Big|_{s=-4}$$

$$=\left(\frac{5}{(s+4)^2}e^{st}+\frac{2s+3}{s+4}te^{st}\right)\Big|_{s=-3}+\frac{2s+3}{(s+3)^2}e^{st}\Big|_{s=-4}=5e^{-3t}-3te^{-3t}-5e^{-4t}$$

重複極がある場合

$$F(s)=\frac{M(s)}{(s+a)^n N(s)}=\frac{K_1}{(s+a)}+\frac{K_2}{(s+a)^2}+\cdots+\frac{K_j}{(s+a)^j}+\cdots+\frac{K_n}{(s+a)^n}+F_1(s)$$

$$(s+a)^n F(s)=K_1(s+a)^{n-1}+K_2(s+a)^{n-2}+\cdots+K_j(s+a)^{n-j}+\cdots+K_n+(s+a)^n F_1(s)$$

$(n-j)$回微分

$$\frac{d^{n-j}}{dt^{n-j}}\left\{(s+a)^n F(s)\right\}=\frac{(n-1)!}{(j-1)!}K_1(s+a)^{j-1}+\frac{(n-2)!}{(j-2)!}K_2(s+a)^{j-2}+\cdots+(n-j)!K_r$$
$$+0+\cdots+0+(s+a)^j G_1(s)$$

$s=-a$

$$\frac{d^{n-j}}{dt^{n-j}}\left\{(s+a)^n F(s)\right\}\Big|_{s=-a}=(n-j)!K_r$$

$$K_r=\frac{1}{(n-j)!}\frac{d^{n-j}}{dt^{n-r}}\left\{(s+a)^n F(s)\right\}\Big|_{s=-a}$$

ラプラス変換の例題

以下の推移定理を証明せよ

$$f(t-a) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-as}F(s)$$

$$e^{-bt}f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s+b)$$

適用例) $(A+Bt)e^{-bt} \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{A}{s+b}+\dfrac{B}{(s+b)^2}$

$$e^{-bt}\sin\omega t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega}{(s+b)^2+\omega^2}$$

$$e^{-bt}\cos\omega t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{(s+b)}{(s+b)^2+\omega^2}$$

以下の時間関数のラプラス変換を求めよ

$\sin\omega t \quad \cos\omega t \quad e^{-at}\cos\omega t$

以下の関数のラプラス逆変換を求めよ

$$\frac{1}{(s+a)(s+b)} \quad \frac{3s+8}{s^2+9} \quad \frac{s+2}{s(s^2+2s+5)}$$