1 (1)

$t \geq 0$ における回路方程式は，コンデンサの上部極板の電荷を $q(t)$ として以下のように書ける

$$Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = e_s(t)$$

電流と電荷の間の関係式 $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ を代入すると以下の $q(t)$ に関する微分方程式を得る．

$$R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = e_s(t)$$

数値を代入すると以下の式を得る．

$$\frac{dq(t)}{dt} + 4q = 10\sin 2t$$

上式の解を定常解 $q_s(t)$ と過渡解 $q_t(t)$ に分けて考える．

定常解

交流回路理論より電荷 $q_s(t)$ の複素数表示 Q_s は，$d/dt \rightarrow j\omega = j2$ として

$$(j2+4)Q_s = 10 \rightarrow \frac{10}{4+j2} = \frac{10(2-j)}{2(2+j)(2-j)} = 2-j$$

したがって，時間関数 $q_s(t)$ は以下のように計算できる．

$$q_s(t) = \mathrm{Im}\left\{Q_s e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{(2-j)e^{j2t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{(2-j)(\cos 2t + j\sin 2t\right\} = -\cos 2t + 2\sin 2t$$

過渡解

$$q_t(t) = Ae^{-4t} \qquad (A\ :\ \text{積分定数})$$

したがって，一般解 $q(t)$ は以下のように書ける．

$$q(t) = Ae^{-4t} - \cos 2t + 2\sin 2t$$

ここで，$t=0$ でコンデンサの電荷 $q(t)$ は 0 であるので

$$q(0) = A - 1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad A = 1$$

よって，一般解 $q(t)$ は以下のように求まる．

$$q(t) = e^{-4t} - \cos 2t + 2\sin 2t\ [\mathrm{C}]$$

また，電流 $i(t)$ はは以下のように求まる．

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -4e^{-4t} + 2\sin 2t + 4\cos 2t\ [\mathrm{A}]$$

1 (2)

$t \geq 0$ における回路方程式は数値を代入して以下のように書ける

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = e_s(t) \quad \rightarrow \quad i(t) + 4\int i(t)dt = 10e^{-2t}$$

上式をラプラス変換すると

$$I(s) + 4\left\{\frac{I(s)}{s} + \int i(t)dt\bigg|_{t=0}\right\} = \frac{10}{s+2}$$

$t = 0$ ではコンデンサに蓄えられている電荷は 0 なので

$$\left(1 + \frac{4}{s}\right)I(s) = \frac{10}{s+2} \quad \rightarrow \quad I(s) = \frac{10s}{(s+2)(s+4)}$$

逆変換積分演算によりラプラス逆変換すると

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathscr{L}\{I(s)\} = (s+4)I(s)e^{st}\Big|_{s=-4} + (s+2)I(s)e^{st}\Big|_{s=-2} \\ &= \frac{10s}{s+2}e^{st}\bigg|_{s=-4} + \frac{10s}{s+4}e^{st}\bigg|_{s=-2} = \frac{-40}{-2}e^{-4t} + \frac{-20}{2}e^{-2t} \\ &= 20e^{-4t} - 10e^{-2t} \text{ [A]} \end{aligned}$$

2

解法1

$t \geq 0$ における回路方程式は，コンデンサの上部極板の電荷を $q(t)$ として以下のように書ける

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = E$$

電流と電荷の間の関係式 $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ を代入すると以下の $q(t)$ に関する微分方程式を得る．

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E$$

数値を代入すると以下の式を得る．

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{dq(t)}{dt} + 4q = 4$$

上式の解を定常解 $q_s(t)$ と過渡解 $q_t(t)$ に分けて考える．

定常解

電源が直流であるので，定常状態においては電流，電荷の時間変化がなくなる．したがって，$d/dt \to 0$ として

$$4q_s(t) = 4 \quad \to \quad q_s(t) = 1$$

過渡解

$q_t(t) = Ae^{mt}$ $(A:$ 定数$)$ という解を仮定し，$q_t(t)$ は恒等的に 0 ではないとすると

$$(m^2 + 5m + 4)q_t(t) = (m+1)(m+4)q_t(t) = 0 \quad \to \quad m = -1,\ -4$$

であるので

$$q_t(t) = A_1e^{-t} + A_2e^{-4t}$$

したがって，一般解 $q(t)$ は以下のように書ける．

$$q(t) = 1 + A_1e^{-t} + A_2e^{-4t}$$

電流 $i(t)$ はは以下のように書ける

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -A_1e^{-t} - 4A_2e^{-4t}$$

ここで，$t = 0$ での初期条件として $q(0) = 0$，$i(0) = 0$ を代入すると

$$\begin{aligned} q(t) &= 1 + A_1e^{-t} + A_2 = 0 \\ i(t) &= -A_1 - 4A_2 = 0 \end{aligned}$$

上式の連立方程式を解くと

$$A_1 = -\frac{4}{3}, \quad A_2 = \frac{1}{3}$$

と求まるので，電流 $i(t)$ は

$$i(t) = \frac{4}{3}\left(e^{-t} - e^{-4t}\right) \ [\mathrm{A}]$$

と求まる．

解法 2

$t \geq 0$ における回路方程式は数値を代入して以下のように書ける

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = E \qquad \rightarrow \qquad \frac{di(t)}{dt} + 5i(t) + 4\int i(t)dt = 4$$

上式をラプラス変換すると

$$(sI(s) - i(0)) + 5I(s) + 4\left\{\frac{I(s)}{s} + \int i(t)dt\Big|_{t=0}\right\} = \frac{4}{s}$$

$t = 0$ でコンデンサに蓄えられている電荷は 0，回路に流れる電流は 0 なので

$$\left(s + 5 + \frac{4}{s}\right)I(s) = \frac{4}{s} \qquad \rightarrow \qquad I(s) = \frac{4}{(s+1)(s+4)}$$

逆変換積分演算によりラプラス逆変換すると

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathscr{L}\{I(s)\} = (s+1)I(s)e^{st}\Big|_{s=-1} + (s+4)I(s)e^{st}\Big|_{s=-4} \\ &= \frac{4}{s+4}e^{st}\Big|_{s=-1} + \frac{4}{s+1}e^{st}\Big|_{s=-4} = \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{4}{-3}e^{-4t} \\ &= \frac{4}{3}\left(e^{-t} - e^{-4t}\right) \text{ [A]} \end{aligned}$$

3

解法 1

まず，$t=0$ での初期状態を考える．交流回路理論より $t<0$ では，電流の複素表示 I は，電圧の振幅を $V=10$ として

$$I=\frac{V}{(R_0+R_1)+j\omega L}=\frac{10}{4+j10\cdot 0.2}=\frac{10}{2(2+j))}=\frac{10(2-j)}{2(2+j)(2-j)}=2-j$$

したがって，$t<0$ での時間関数 $i(t)$ は以下のように計算できる．

$$i(t)=\mathrm{Im}\left\{Ie^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Im}\left\{(2-j)e^{j10t}\right\}=\mathrm{Im}\left\{(2-j)(\cos 10t+j\sin 10t\right\}=-\cos 10t+2\sin 10t$$

よって

$$i(0)=-1\ [\mathrm{A}]$$

と求まる．

次に，$t\geq 0$ では，R_0 には電圧はかからないので，回路方程式は具体的な数値を代入して以下のように書ける

$$L\frac{di(t)}{dt}+R_1 i(t)=e_s(t)\qquad\rightarrow\qquad i(t)+0.2\frac{di(t)}{dt}=10\sin 10t$$

上式の解を定常解 $i_s(t)$ と過渡解 $i_t(t)$ に分けて考える．

定常解

交流回路理論より電荷 $i_s(t)$ の複素数表示 I_s は，$d/dt\rightarrow j\omega=j10$ として

$$(j2+1)I_s=10\rightarrow\frac{10}{1+j2}=\frac{10(1-j2)}{(1+j2)(1-j2)}=2(1-j2)$$

したがって，時間関数 $i_s(t)$ は以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}i_s(t)&=\mathrm{Im}\left\{I_s e^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Im}\left\{2(1-j2)e^{j10t}\right\}=\mathrm{Im}\left\{2(1-j2)(\cos 10t+j\sin 10t\right\}\\&=-4\cos 10t+2\sin 10t\end{aligned}$$

過渡解

$$i_t(t)=Ae^{-5t}\qquad(A\ :\ \text{積分定数})$$

したがって，一般解 $q(t)$ は以下のように書ける．

$$i(t)=Ae^{-5t}-4\cos 10t+2\sin 10t$$

ここで，$t=0$ で回路に流れるの電流 $i(t)$ は $i(0)=-1$ A であるので

$$i(0)=A-4=-1\qquad\rightarrow\qquad A=3$$

よって，一般解 $q(t)$ は以下のように求まる．

$$i(t)=3e^{-5t}-4\cos 2t+2\sin 2t\ [\mathrm{A}]$$

解法 2

$t=0$ での初期電流を求めるところまでは解法 1 と同様であり

$$i(0)=-1\ [\mathrm{A}]$$

である．

$t\geq 0$ における回路方程式は数値を代入して以下のように書ける

$$L\frac{di(t)}{dt}+R_1 i(t)=e_s(t) \quad \rightarrow \quad 0.2\frac{di(t)}{dt}+i(t)=10\sin 10t$$

上式をラプラス変換すると

$$0.2\left(sI(s)-i(0)\right)+I(s)=\frac{10\cdot 10}{s^2+10^2}$$

上式より

$$(s+5)I(s)=\frac{500}{s^2+10^2}+i(0)=\frac{500}{s^2+10^2}-1 \quad \rightarrow \quad I(s)=\frac{500}{(s+5)(s^2+10^2)}-\frac{1}{s+5}$$

上式の右辺第 1 項を部分分数展開する．

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{K_1 s+K_2}{s^2+10^2}+\frac{K_3}{s+5}-\frac{1}{s+5}=\frac{(K_1 s+K_2)(s+5)+K_3(s^2+10^2)}{(s+5)(s^2+10^2)}-\frac{1}{s+5} \\ &= \frac{(K_1+K_3)s^2+(5K_1+K_2)s+(5K_2+100K_3)}{(s+5)(s^2+10^2)}-\frac{1}{s+5} \end{aligned}$$

分子の係数比較より

$$\begin{aligned} s^2 &: K_1+K_3=0 \quad \rightarrow \quad K_3=-K_1 \\ s^1 &: 5K_1+K_2=0 \quad \rightarrow \quad K_2=-5K_1 \\ s^0 &: 5K_2+100K_3=500 \quad \rightarrow \quad -25K_1-100K_1=500 \quad \rightarrow \quad K_1=-4 \end{aligned}$$

以上より，$K_1=-4$，$K_2=20$，$K_3=4$ と求まり

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{-4s+20}{s^2+10^2}+\frac{4}{s+5}-\frac{1}{s+5} \\ &= -4\cdot frac1s^2+10^2+2\cdot\frac{10}{s^2+10^2}+\frac{3}{s+5} \end{aligned}$$

上式をラプラス逆変換すると

$$i(t)=\mathcal{L}\{I(s)\}=-4\cos 10t+2\sin 10t+3e^{-5t}\ [\mathrm{A}]$$

4 (a)

$t=0$ でコンデンサにかかる電圧 $v_C(0)$ と電荷 q(0) は

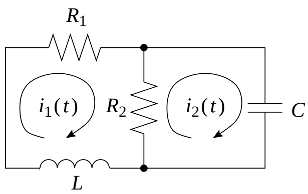
$$\begin{aligned} v_C(0) &= \frac{R_2}{R_0+R_1+R_2}E=\frac{1}{1+1+1}E=\frac{1}{3}\cdot 30=10\ \mathrm{V} \\ q(0) &= Cv_C(0)=1\cdot 10=10\ \mathrm{C} \end{aligned}$$

コンデンサに蓄えられているエネルギーは

$$W_C=\frac{1}{2}CV_C^2=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 10^2=50\ \mathrm{J}$$

4 (b)

$t\geq 0$ での回路は以下の図ようになる．



閉路方程式は以下のように書ける．

$$\begin{aligned} &R_1 i_1(t)+R_2\left(i_1(t)-i_2(t)\right)+L\frac{di_1(t)}{dt}=0 \\ &R_2\left(i_2(t)-i_1(t)\right)+\frac{1}{C}\int i_2(t)dt=0 \end{aligned}$$

上式をラプラス変換すると

$$\begin{aligned} &R_1 I_1(s)(t)+R_2\left(I_1(s)-I_2(s)\right)+L\left\{sI_1(s)-i_1(0)\right\}=0 \\ &R_2\left(I_2(s)-I_1(s)\right)+\frac{1}{C}\left\{\frac{I_2(s)}{s}+\int i_2(t)dt\bigg|_{t=0}\right\}=0 \end{aligned}$$

数値を代入し整理すると

$$\begin{aligned} &(s+2)I_1(s)(t)-I_2(s)=i_1(0) \\ &-I_1(s)+\left(1+\frac{1}{s}\right)I_2(s)=-\frac{q(0)}{s} \end{aligned}$$

$t=0$ でコイルに流れる電流は

$$i_1(0)=\frac{E}{R_0+R_1+R_2}=\frac{30}{1+3+1}=10\ \mathrm{A}$$

であるので

$$\begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & 1+\frac{1}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ -\frac{10}{s} \end{bmatrix}$$

Cramer の公式を用いて $I_1(s)$，$I_2(s)$ を求める．

$$\begin{aligned} \text{行列式}\Delta &= (2+s)\left(1+\frac{1}{s}\right)-(-1)^2=\frac{(s+2)(s+1)-s}{s}==\frac{s^2+2s+2}{s} \\ &= \frac{(s+1)^2+1}{s} \end{aligned}$$

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -\frac{10}{s} & 1+\frac{1}{s} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{10s}{(s+1)^2+1} = \frac{10(s+1)-10}{(s+1)^2+1}$$

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} s+2 & 10 \\ -1 & -\frac{10}{s} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-20}{(s+1)^2+1}$$

$I_1(s)$，$I_2(s)$，をラプラス逆変換して $i_1(t)$，$i_2(t)$ を求めると．

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 10e^{-t}(\cos t - \sin t) \ [\mathrm{A}] \\ i_2(t) &= -20e^{-t}\sin t \ [\mathrm{A}] \end{aligned}$$

以上より，抵抗 R_1，R_2 に流れる電流 $i_{R_1}(t)$，$i_{R_2}(t)$ は

$$\begin{aligned} i_{R_1}(t) &= i_1(t) \\ &= 10e^{-t}(\cos t - \sin t) \ [\mathrm{A}] \\ i_{R_2}(t) &= i_1(t) - i_2(t) \\ &= 10e^{-t}(\cos t + \sin t) \ [\mathrm{A}] \end{aligned}$$

4 (c)

コンデンサとコイルに蓄えられていたエネルギーが抵抗で消費されるので，抵抗で消費されるエネルギーは

$$W_C + W_L = \frac{1}{2}Cv_C(0)^2 + \frac{1}{2}Li_L(0)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 10^2 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 10^2 = 100 \ \mathrm{J}$$

参考までに (b) で求まった解を用いて計算すると

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left(R_1 i_{R_1}(t)^2 + R_2 i_{R_2}(t)^2\right) dt \\ = & \int_0^\infty \left\{100e^{-2t}(\cos t - \sin t)^2 + 100e^{-2t}(\cos t + \sin t)^2\right\} dt \\ = & \int_0^\infty 200e^{-2t}\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) dt = \int_0^\infty 100e^{-2t} dt = \left[\frac{200}{-2}e^{-2t}\right]_0^\infty = 0 - (-100) \\ = & \ 100 \ \mathrm{J} \end{aligned}$$

5

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_0^t h(\tau)e_s(t-\tau)d\tau = \int_0^t \frac{1}{2}e^{-2\tau}\cdot 10e^{-3(t-\tau)}\cdot u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t \frac{1}{2}e^{-2\tau}\cdot 10e^{-3(t-\tau)}d\tau = 5e^{-3t}\int_0^t e^{\tau}d\tau = 5e^{-3t}\left[e^{\tau}\right]_0^t = 5e^{-3t}\left(e^t - 1\right) \\ &= 5\left(e^{-2t} - e^{-3t}\right)\ [\mathrm{A}] \end{aligned}$$