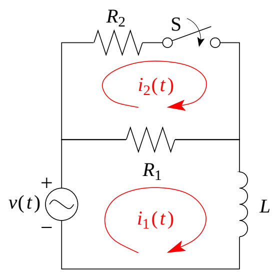
小テスト

図の回路において，スイッチ S を開いて定常状態になっているとする．ここで，スイッチ S を閉じたとして以下の設問に答えなさい．なお，スイッチ S を閉じた時刻を $t=0$，$R_1 = 3\ \Omega$，$R_2 = 6\ \Omega$，$L = \frac{1}{5}$ H，$v(t) = 10\sin 20t$ [V] とする．



(a) 時刻 $t \leq 0$ での電流 $i_1(t)$ を求めなさい．また，得られた $i_1(t)$ から $t=0$ における電流 $i_1(0)$ を求めなさい．

(b) 時刻 $0 \leq t$ での電流 $i_1(t)$，$i_2(t)$ についての回路方程式を求めなさい．

(c) 設問 (b) で求めた式をラプラス変換しなさい．

(d) $I_2(s)$ を求めなさい．

(e) $I_2(s)$ を逆ラプラス変換し，電流 $i_1(t)$，$i_2(t)$ を求めなさい．

解答

(a) 時刻 $t \leq 0$ での回路では，交流理論より

$$I_1 = \frac{V}{R_1 + j\omega L} = \frac{10}{3 + j20 \cdot \frac{1}{5}} = \frac{10}{3 + j4} = \frac{10}{5e^{j\theta}} = 2e^{-j\theta} \qquad \left(\tan\theta = \frac{4}{3}\right)$$

時間変化 $e^{j\omega t} = e^{j20t}$ を乗じ，虚部を取ると，電流の時間変化は

$$i_1(t) = \mathrm{Im}\left\{2e^{j(20t-\theta)}\right\} = 2\sin(20t - \theta)\ [\mathrm{A}]$$

よって，$t=0$ では

$$i_1(0) = -2\sin\theta = -2 \cdot \frac{4}{5} = -\frac{8}{5}\ \mathrm{A}$$

(b)

$$\begin{aligned} &R_1\left(i_1(t) - i_2(t)\right) + L\frac{di_1(t)}{dt} = v(t) \\ &R_2 i_2(t) + R_1\left(i_2(t) - i_1(t)\right) = 0 \end{aligned}$$

与えられた値を代入すると

$$\begin{aligned} &3\left(i_1(t) - i_2(t)\right) + \frac{1}{5}\frac{di_1(t)}{dt} = 10\sin 20t \\ &6i_2(t) + 3\left(i_2(t) - i_1(t)\right) = 0 \end{aligned}$$

$i_1(t)$，$i_2(t)$ について整理すると

$$\begin{aligned} &3i_1(t) + \frac{1}{5}\frac{di_1(t)}{dt} - 3i_2(t) = 10\sin 20t \\ &-3i_1(t) + 9i_2(t) = 0 \end{aligned}$$

(c)

$$3I_1(s)+\frac{1}{5}\left(sI_1(s)-i_1(0)\right)-3I_2(s)=\frac{200}{s^2+20^2}$$
$$-3I_1(s)+9I_2(s)=0$$

上式を整理すると

$$\left(3+\frac{1}{5}s\right)I_1(s)-3I_2(s)=\frac{200}{s^2+20^2}+\frac{1}{5}i_1(0)$$
$$-I_1(s)+3I_2(s)=0$$

(d) 設問 (c) の答の第 2 式より

$$I_1(s)=3I_2(s)$$

設問 (c) の答の第 1 式に，上式と設問 (a) で求めた $i(0)=-\frac{8}{5}$ A を代入する

$$\left(3+\frac{1}{5}s\right)\cdot 3I_2(s)-3I_2(s)=\frac{200}{s^2+20^2}-\frac{8}{25}$$

両辺を 5/3 倍し整理すると

$$(s+10)I_2(s)=\frac{1000}{3(s^2+20^2)}-\frac{8}{15}$$

よって

$$I_2(s)=\frac{1000}{3(s+10)(s^2+20^2)}-\frac{8}{15(s+10)}$$

(e) 設問 (d) で求めた $I_2(s)$ の第 1 項を部分分数展開する．

$$\frac{1000}{(s+10)(s^2+20^2)}=\frac{K_1}{s+10}+\frac{K_2s+20K_3}{s^2+20^2}=\frac{K_1s^2+400K_1+K_2s^2+(10K_2+20K_3)s+200K_3}{(s+10)(s^2+20^2)}$$

係数を比較すると

$$s^2 \quad : \quad K_1+K_2=0 \qquad \rightarrow \qquad K_1=-K_2$$
$$s^1 \quad : \quad 10K_2+20K_3=0 \qquad \rightarrow \qquad K_2=-2K_3=-K_1$$
$$s^0 \quad : \quad 400K_1+200K_3=1000 \qquad \rightarrow \qquad 2K_1+K_3=5$$

第 2 式を第 3 式に代入

$$5K_3=5 \qquad \rightarrow \qquad K_3=1$$

上式を第 1 式，第 2 式に代入すると

$$K_1=2, \qquad K_2=-2$$

よって

$$I_2(s)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{s+10}+\frac{-2s+20}{s^2+20^2}\right)-\frac{8}{15}\cdot\frac{1}{s+10}=\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{s+10}+\frac{1}{3}\left(-2\cdot\frac{s}{s^2+20^2}+\frac{20}{s^2+20^2}\right)$$

上式を逆ラプラス変換すると

$$i_2(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{I_2(s)\right\}=\frac{2}{15}e^{-10t}+\frac{1}{3}\left(-2\cos 20t+\sin 20t\right) \ \text{[A]}$$

また，$i_1(t)=3i_2(t)$ なので

$$i_1(t)=\frac{2}{5}e^{-10t}-2\cos 20t+\sin 20t \ \text{[A]}$$