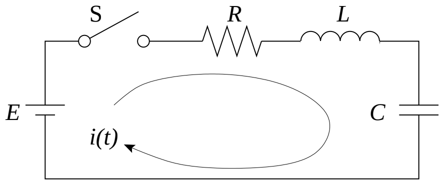
小テスト

図の RLC 回路で，時刻 $t = 0$ でスイッチ S を閉じたとして，以下の設問に答えなさい．なお，$R = 6\ \Omega$，$L = 2$ H，$C = 0.25$ F，$E = 20$ V とし，$t \le 0$ でのコンデンサの電荷は 0 とする．



(a) コンデンサ C に蓄えられる電荷を $q(t)$ とする．$q(t)$ を用いて，$0 < t$ における回路の微分方程式を求めなさい．

(b) 設問 (a) で求めた微分方程式に対する定常解 $q_s(t)$ を求めなさい．

(c) 設問 (a) で求めた微分方程式に対する過渡解 $q_t(t)$ を求めなさい．

(d) 設問 (b),(c) の結果から一般解を求めなさい．

(e) 回路の初期条件を考え，設問 (a)〜(d) の結果から $0 < t$ において回路に流れる電流 $i(t)$ を求めなさい．

解答

(a) キルヒホッフの電圧則より

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = E$$

$i(t) = dq(t)/dt$ の関係を用いて

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E$$

与えられた値を代入すると

$$2\frac{d^2q(t)}{dt^2} + 6\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{0.25} = 20$$

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + 3\frac{dq(t)}{dt} + 2q(t) = 10$$

(b) 定常解 $q_s(t)$ は

$$2q_s(t) = 10 \qquad \rightarrow \qquad q_s(t) = 5\ \mathrm{C}$$

(c) 過渡解 $q_t(t)$ に対する微分方程式は

$$\frac{d^2q_t(t)}{dt^2} + 3\frac{dq_t(t)}{dt} + 2q_t(t) = 0$$

(d) 解を $q_t(t) = Ae^{mt}$ と仮定すると，特性方程式は

$$m^2 + 3m + 2 = 0$$

となり，根は

$$m = -1, -2$$

となるので，過渡解 $q_t(t)$ は

$$q_t(t) = A_1e^{-t} + A_2e^{-2t}$$

(e) 従って一般解 $q(t)$ は

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = 5 + A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}$$

(f) 電流 $i(t)$ は

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -A_1 e^{-t} - 2A_2 e^{-2t}$$

初期条件として $t = 0$ での値

$$q(0) = 0, \quad i(0) = 0$$

を用いると

$$\begin{aligned} q(0) &= 5 + A_1 + A_2 = 0 \\ i(0) &= -A_1 - 2A_2 = 0 \end{aligned}$$

したがって $A_1 = -10$，$A_2 = 5$ である．よって，電流 $i(t)$ は

$$i(t) = 10e^{-t} - 10e^{-2t} \text{ A}$$