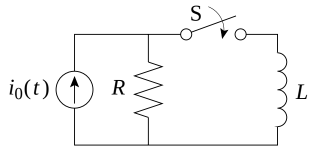
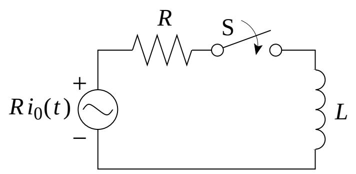
小テスト

図の回路で，$t=0$ でスイッチ S を閉じ，交流電流 $i_0(t)=I_0\sin(\omega t+\theta)$ を流したときコイル L に流れる電流 $i(t)$ を求めなさい．ただし，コイル L の初期電流は 0 とする．



解答

テブナンの定理により電流源を電圧源に置き換える



回路方程式は

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)=RI_0\sin(\omega t+\theta)$$

上式の解を定常解 $i_s(t)$ と過渡解 $i_t(t)$ に分けて考えると，それぞれ

$$L\frac{di_s(t)}{dt}+Ri_s(t)=RI_0\sin(\omega t+\theta)$$
$$L\frac{di_t(t)}{dt}+Ri_t(t)=0$$

まず，定常解について解く，交流理論を用いて $d/dt\to j\omega$ として

$$j\omega LI_s+RI_s=RI_0e^{j\theta}$$

上式を I_s について解くと

$$\begin{aligned} I_s &= \frac{RI_0}{R+j\omega L}e^{j\theta} \\ &= \frac{RI_0}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}e^{j(\theta-\phi')} \qquad \left(\phi'=\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right) \end{aligned}$$

よって，定常解 $i_s(t)$ は

$$i_s(t)=I_m\sin(\omega t+\theta-\phi') \qquad \left(I_m=\frac{RI_0}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\right)$$

となる．

一方，過渡解は

$$i_t(t)=Ae^{-\frac{R}{L}t} \qquad (A:\text{積分定数})$$

となる．

よって，電流 $i(t)$ の一般解は

$$\begin{aligned} i(t) &= i_s(t)+i_t(t) \\ &= I_m\sin(\omega t+\theta-\phi')+Ae^{-\frac{R}{L}t} \end{aligned}$$

となる．

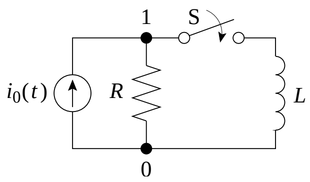
ここで，初期条件として $t=0$ で $i(0)=0$ を代入すると

$$i(0)=I_m\sin(\theta-\phi')+A=0 \qquad \rightarrow \qquad A=-I_m\sin(\theta-\phi')$$

よって，電流 $i(t)$ は

$$
\begin{aligned}
i(t) &= I_m \sin(\omega t + \theta - \phi') - I_m \sin(\theta - \phi') e^{-\frac{R}{L}t} \\
&= \frac{RI_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \left\{ \sin(\omega t + \theta - \phi') - \sin(\theta - \phi') e^{-\frac{R}{L}t} \right\}
\end{aligned}
$$

別解



上図のように節点を設定すると，スイッチを入れた後の回路の節点方程式は

$$
\frac{v_1(t)}{R} + \frac{1}{L} \int v_1(t) dt = i_0(t)
$$

ここで，コイルに流れる電流と電圧の関係 $v_1(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$ を用いると．

$$
\frac{L}{R} \frac{di(t)}{dt} + i(t) = i_0(t)
$$

両辺を R 倍すると解答の回路方程式と同じになり，同様に解ける．