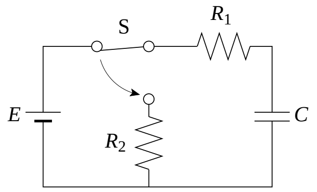
課題 1

下図の回路は定常状態であるとする．いま，$t = 0$ でスイッチ S を閉じたとするとき，抵抗 R_1 に流れる電流 $i(t)$ を求め時間変化を図示せよ．また，R_1，C にかかる電圧の時間変化を求め図示せよ．



解答

$t < 0$ の定常状態で抵抗 R_1 に流れる電流は $i(0) = 0$，コンデンサ C に蓄えられている電荷は $q(0) = CE$ である．また，$t = 0$ でスイッチ S を閉じた後の回路方程式は，電流の向きを時計回りに i ，C の電荷は上部電極に電荷 $+q$ とすると

$$(R_1 + R_2)i + \frac{q}{C} = 0$$

であり，$i = dq/dt$ の関係を用いると

$$(R_1 + R_2)\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

と書ける．上式の解を定常解 q_s と q_t に分けると，それぞれ

$$\frac{q_s}{C} = 0 \quad \rightarrow \quad q_s = 0$$

$$(R_1 + R_2)\frac{dq_t}{dt} + \frac{q_t}{C} = 0 \quad \rightarrow \quad q_t = Ae^{-t/\tau} \quad (\ A : \text{積分定数}, \tau = C(R_1 + R_2)\ )$$

したがって，一般解は以下のように与えられる．

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = Ae^{-t/\tau}$$

$t = 0$ での初期条件より積分定数 A は以下のように求まる．

$$q(0) = A = CE$$

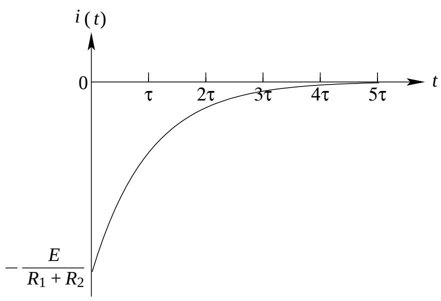
以上より，C に蓄えられている電荷は

$$q(t) = CEe^{-t/\tau}$$

であり，抵抗 R_1 に流れる電流 $i(t)$ は

$$i(t) = -\frac{E}{R_1 + R_2}e^{-t/\tau} \quad (\ \text{時定数}\tau = C(R_1 + R_2)\ )$$

である．ただし，時計回りに流れる電流を正としている．このグラフを下図に示す．



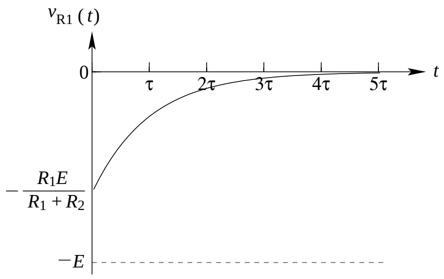
また，R_1，R_2，C にかかる電圧はそれぞれ

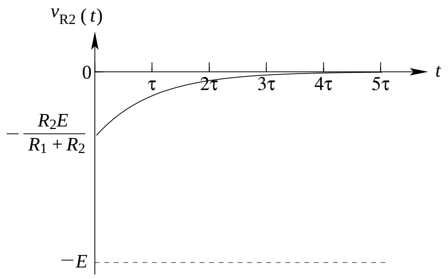
$$v_{R1}(t) = R_1 i(t) = -\frac{R_1 E}{R_1 + R_2} e^{-t/\tau}$$

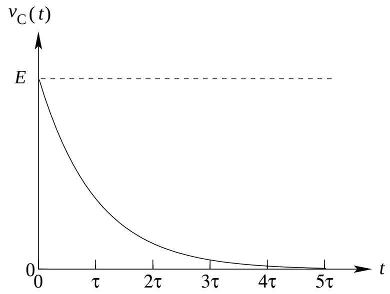
$$v_{R2}(t) = R_2 i(t) = -\frac{R_2 E}{R_1 + R_2} e^{-t/\tau}$$

$$v_C(t) = \frac{q(t)}{C} = E e^{-t/\tau}$$

であり，このグラフを以下に示す．

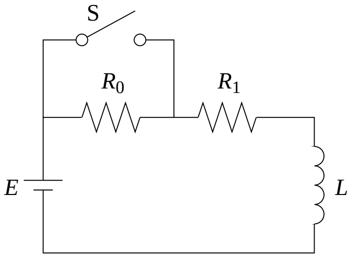






課題 2

下図の回路は定常状態であるとする．いま，$t = 0$ でスイッチ S を閉じたとするとき，抵抗 R_1 に流れる電流 $i(t)$ を求め時間変化を図示せよ．また，R_1，L にかかる電圧の時間変化を求め図示せよ．



解答

$t < 0$ の定常状態でインダクタ L に流れる電流は

$$I = \frac{E}{R_0 + R_1}$$

である．また，$t = 0$ でスイッチ S を閉じた後の回路方程式は

$$L\frac{di(t)}{dt} + R_1 i(t) = E$$

である．上式の定常解 $i_s(t)$ と 過渡解 $i_t(t)$ はそれぞれ以下のようになる．

- 定常解

$$R_1 i_s(t) = E \qquad \rightarrow \qquad i_s(t) = \frac{E}{R_1}$$

- 過渡解

$$L\frac{di_t(t)}{dt} + R_1 i_t(t) = 0 \qquad \rightarrow \qquad i_t(t) = Ae^{-\frac{R_1}{L}t} \qquad (A : \text{積分定数})$$

したがって，一般解は以下のように与えられる．

$$i(t) = i_s(t) + i_t(t) = \frac{E}{R_1} + Ae^{-\frac{R_1}{L}t}$$

$t = 0$ での初期条件より積分定数 A は以下のように求まる．

$$i(0) = \frac{E}{R_1} + A = \frac{E}{R_0 + R_1} \qquad \rightarrow \qquad A = \left(\frac{1}{R_0 + R_1} - \frac{1}{R_1}\right)E$$

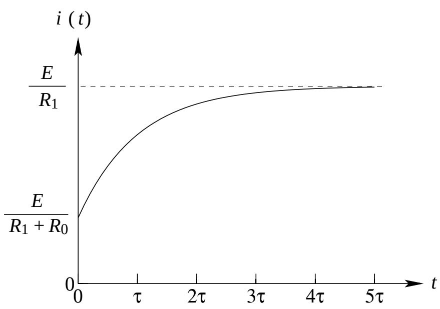
以上より，電流 $i(t)$ は

$$i(t) = \frac{E}{R_1} + \left(\frac{1}{R_0 + R_1} - \frac{1}{R_1}\right)Ee^{-\frac{R_1}{L}t}$$

と求まる．グラフは下図のようになる．また，時定数 τ は

$$\tau = \frac{L}{R_1}$$

である．



R_1，L にかかる電圧の時間変化は

$$v_{R1} = R_1 i(t) = E - \frac{R_0}{R_0 + R_1} E e^{-\frac{R_1}{L} t}$$

$$v_L = L \frac{di(t)}{dt} = \frac{R_0}{R_0 + R_1} E e^{-\frac{R_1}{L} t}$$