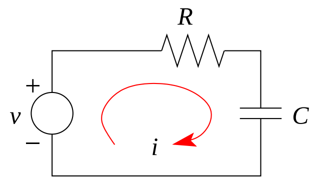
下図の回路のインパルス応答 $h(t)$ を求めよ．また，この回路に $v(t)=Ee^{-bt}u(t)$ が印加されたときの回路の応答を $h(t)$ を利用して求めよ．ただし，コンデンサの初期電荷は 0 とする．



回路方程式はキルヒホッフの電圧則より以下のように書ける．

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)dt=v(t)$$

電源に単位インパルスを仮定すると

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)dt=\delta(t)$$

であり，上式をラプラス変換すると

$$RI(s)+\frac{1}{C}\left\{\frac{I(s)}{s}+\int i(t)dt\Big|_{t=0}\right\}=1$$

コンデンサの初期電荷が 0 であることを考慮し，上式を $I(s)$ について解くと

$$I(s)=\frac{sC}{sCR+1}=\frac{\frac{s}{R}}{s+\frac{1}{CR}}=\frac{1}{R}\left(1-\frac{\frac{1}{CR}}{s+\frac{1}{CR}}\right)$$

よって $h(t)=i(t)$ は

$$h(t)=i(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{I(s)\right\}=\frac{1}{R}\left(\delta(t)-\frac{1}{CR}e^{-\frac{t}{CR}}\right)$$

入力電圧が $v(t)=Ee^{-bt}u(t)$ であるとき

$$\begin{aligned}
i(t) &= \int_0^t h(\tau)v(t-\tau)d\tau=\int_0^t\frac{1}{R}\left(\delta(\tau)-\frac{1}{CR}e^{-\frac{\tau}{CR}}\right)\cdot Ee^{-b(t-\tau)}d\tau\\
&= \frac{Ee^{-bt}}{R}\int_0^t\left(\delta(\tau)e^{+b\tau}-\frac{1}{CR}e^{\left(b-\frac{1}{CR}\right)\tau}\right)d\tau\\
&= \frac{Ee^{-bt}}{R}\left(1-\frac{1}{CR}\left[\frac{e^{\left(b-\frac{1}{CR}\right)\tau}}{b-\frac{1}{CR}}\right]_0^t\right)=\frac{Ee^{-bt}}{R}\left(1-\frac{e^{\left(b-\frac{1}{CR}\right)t}-1}{bCR-1}\right)\\
&= \frac{E}{R}\cdot\frac{bCR}{bCR-1}e^{-bt}-\frac{E}{R(bCR-1)}e^{-\frac{t}{CR}}=\frac{E}{R(1-bCR)}\left(e^{-\frac{t}{CR}}-bCRe^{-bt}\right)
\end{aligned}$$

次に，普通にラプラス変換により過渡現象を求めてみる

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)dt=Ee^{-bt}u(t)$$

であり，上式をラプラス変換すると

$$RI(s)+\frac{1}{C}\left\{\frac{I(s)}{s}+\int i(t)dt\Big|_{t=0}\right\}=\frac{E}{s+b}$$

コンデンサの初期電荷が 0 であることを考慮し，上式を $I(s)$ について解くと

$$I(s)=\frac{\frac{E}{R}s}{\left(s+\frac{1}{CR}\right)(s+b)}$$

ラプラス逆変換して $i(t)$ を求めると

$$\begin{aligned}
i(t) &= (s+b)I(s)e^{st}\big|_{s=-b}+\left(s+\frac{1}{SR}\right)I(s)e^{st}\Big|_{s=-\frac{1}{CR}}\\
&= \frac{\frac{E}{R}s}{\left(s+\frac{1}{CR}\right)}e^{st}\Bigg|_{s=-b}+\frac{\frac{E}{R}s}{(s+b)}e^{st}\Bigg|_{s=-\frac{1}{CR}}\\
&= \frac{-bCE}{1-bCR}e^{-bt}+\frac{-\frac{E}{R}}{bCR-1}e^{-\frac{t}{CR}}\\
&= \frac{E}{R(1-bCR)}\left(e^{-\frac{t}{CR}}-bCRe^{-bt}\right)
\end{aligned}$$