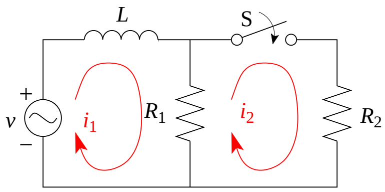
下図の回路で $t=0$ でスイッチを閉じるとき，以下のパラメータに対して各閉路電流の時間変化を求めよ．$v=50\sin 100t$ [V]，$L=0.02$ H，$R_1=1$ Ω，$R_1=3$ Ω



まず，$t=0$ 以前の初期状態を考える．$\omega=100$ として，交流理論より

$$I_1=\frac{50}{R+j\omega L}=\frac{50}{1+j2}=\frac{50}{\sqrt{5}e^{j\theta}}=10\sqrt{5}e^{-j\theta}\qquad(\tan\theta=2)$$

実際の時間変化は $e^{j\omega t}=e^{j100t}$ をかけて虚部を取ると

$$i_1(t)=10\sqrt{5}\sin(100t-\theta)$$

となるので，$t=0$ のとき

$$i_1(0)=10\sqrt{5}\sin(-\theta)=-10\sqrt{5}\sin(\theta)=-10\sqrt{5}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=-20\ \text{A}$$

スイッチを閉じた後 ($t\geq 0$) での回路方程式 (閉路方程式) は

$$L\frac{di_1}{dt}+R_1(i_1-i_2)=v$$
$$R_1(i_2-I_1)+R_2i_2=0$$

与えられた数値を代入すると

$$0.02\frac{di_1}{dt}+i_1-i_2=50\sin 100t$$
$$-i_1+4i_2=0$$

上式をラプラス変換すると

$$0.02\{sI_1(s)-i_1(0)\}+I_1(s)-I_2(s)=\frac{50\times 100}{s^2+100^2}$$
$$-I_1(s)+4I_2(s)=0\qquad\rightarrow\qquad I_1(s)=4I_2(s)$$

$i_1(0)=-20$ A と第 2 式を第 1 式に代入して整理すると

$$(0.08s+3)I_2(s)=\frac{50\times 100}{s^2+100^2}-0.4$$

両辺を 12.5 倍すると

$$(s+37.5)I_2(s)=\frac{62.5\times 100}{s^2+100^2}-5$$

$$I_2(s)=\frac{625\times 100}{(s^2+100^2)(s+37.5)}-\frac{5}{s+37.5}$$

いま，第一項を以下のように部分分数展開する

$$\begin{aligned}I_2(s)&=\frac{K_1s+100K_2}{s^2+100^2}+\frac{K_3}{s+37.5}-\frac{5}{s+37.5}\\&=\frac{(K_1+K_3)s^2+(100K_2+37.5K_1)s+(3750K_2+100^2K_3)}{(s^2+100^2)(s+37.5)}-\frac{5}{s+37.5}\end{aligned}$$

係数を比較すると

$$K_1+K_3=0\qquad\rightarrow\qquad K_3=-K_1$$
$$100K_2+37.5K_1=0\qquad\rightarrow\qquad K_2=-\frac{37.5}{100}K_1$$
$$3750K_2+100^2K_3=62500$$

第１，２式を第３式に代入すると

$$-\{(37.5)^2+100^2\}K_1=62500 \qquad \rightarrow \qquad K_1=-\frac{400}{73}$$

よって

$$K_2=-\frac{37.5}{100}\times\frac{-400}{73}=\frac{150}{73}$$
$$K_3=-K_1=\frac{400}{73}$$

以上より $I_2(s)$ を逆ラプラス変換すると

$$\begin{aligned} i_2(t) &= K_1\cos 100t+K_2\sin 100t+(K_3-5)e^{-37.5t} \\ &= -\frac{400}{73}\cos 100t+\frac{150}{73}\sin 100t+\frac{35}{73}e^{-37.5t} \\ &\simeq -5.48\cos 100t+2.05\sin 100t+0.48e^{-37.5t}\ [\mathrm{A}] \end{aligned}$$

また，$i_1(t)=4i_2(t)$ であるので

$$\begin{aligned} i_1(t) &= -\frac{1600}{73}\cos 100t+\frac{600}{73}\sin 100t+\frac{140}{73}e^{-37.5t} \\ &\simeq -21.92\cos 100t+8.22\sin 100t+1.92e^{-37.5t}\ [\mathrm{A}] \end{aligned}$$