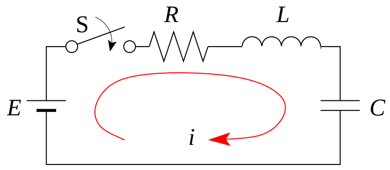
課題 1

下図の回路で，$t=0$ でスイッチを閉じた後の回路に流れる電流 $i(t)$ の時間変化を求めよ．

(a) $E=8$ V，$R=5\ \Omega$，$L=1$ H，$C=0.25$ F
(b) $E=8$ V，$R=4\ \Omega$，$L=1$ H，$C=0.25$ F
(c) $E=8$ V，$R=2\ \Omega$，$L=1$ H，$C=0.25$ F
(d) $E=8$ V，$R=0\ \Omega$，$L=1$ H，$C=0.25$ F



解答

　コンデンサに蓄えられた電荷を $q(t)$ とすると，回路方程式は

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{q}{C}=E$$

コンデンサに流れる電流と電荷の間の関係式 $i(t)=dq/dt$ を用いると

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=E$$

を得る．いま，電荷 $q(t)$ を定常解 $q_s(t)$ と過渡解 $q_t(t)$ の和として $q(t)=q_s(t)+q_t(t)$ と表すと，定常解に関しては，電源が直流であることから $d/dt\to 0$ と置き

$$\frac{q_s}{C}=E \qquad \to \qquad q_s=CE$$

過渡解に対しては回路方程式は

$$L\frac{d^2q_t}{dt^2}+R\frac{dq_t}{dt}+\frac{q_t}{C}=0$$

となるので，$q(t)=A\exp(mt)$ という解を仮定すると

$$\left(Lm^2+Rm+\frac{1}{C}\right)q_t=0$$

となり，q_t は恒等的に 0 ではないとすると

$$Lm^2+Rm+\frac{1}{C}=0$$

でなければならない．以下，それぞれの場合について過渡解を求める

(a)

　問題に与えられた数値を代入すると

$$m^2+5m+4=0 \qquad \to \qquad m=-1,-4$$

よって，一般解は

$$\begin{aligned} q(t) &= q_s(t)+q_t(t)=2+A_1e^{-t}+A_2e^{-4t} \\ i(t) &= \frac{dq}{dt}=-A_1e^{-t}-4A_2e^{-4t} \end{aligned}$$

初期条件として $t=0$ で $q(t)=0$，$i(t)=0$ を代入すると

$$\begin{aligned} q(0) &= 2+A_1+A_2=0 \\ i(0) &= -A_1-4A_2=0 \end{aligned}$$

これを解くと，$A_1=-8/3$，$A_2=2/3$ と求まるので，

$$\begin{aligned} q(t) &= 2-\frac{8}{3}e^{-t}+\frac{2}{3}e^{-4t}\ \mathrm{C} \\ i(t) &= \frac{8}{3}\left(e^{-t}-e^{-4t}\right)\ \mathrm{A} \end{aligned}$$

(b)

　問題に与えられた数値を代入すると

$$m^2+4m+4=0 \qquad \rightarrow \qquad m=-1\ \text{(重解)}$$

よって，一般解は

$$\begin{aligned} q(t) &= q_s(t)+q_t(t)=2+(A_1+A_2t)e^{-2t} \\ i(t) &= \frac{dq}{dt}=\{(A_2-2A_1)-2A_2t\}\,e^{-2t} \end{aligned}$$

初期条件として $t=0$ で $q(t)=0$，$i(t)=0$ を代入すると

$$\begin{aligned} q(0) &= 2+A_1=0 \\ i(0) &= A_2-2A_1=0 \end{aligned}$$

これを解くと，$A_1=-2$，$A_2=-4$ と求まるので，

$$\begin{aligned} q(t) &= 2-(2+4t)e^{-2t}\ \mathrm{C} \\ i(t) &= 8te^{-2t}\ \mathrm{A} \end{aligned}$$

(c)

　問題に与えられた数値を代入すると

$$m^2+2m+4=0 \qquad \rightarrow \qquad m=-1\pm j\sqrt{3}$$

よって，一般解は

$$\begin{aligned} q(t) &= q_s(t)+q_t(t)=2+\left(A_1\cos(\sqrt{3}t)+A_2\sin(\sqrt{3}t)\right)e^{-t} \\ i(t) &= \left(-\sqrt{3}A_1\sin(\sqrt{3}t)+\sqrt{3}A_2\cos(\sqrt{3}t)\right)e^{-t}-\left(A_1\cos(\sqrt{3}t)+A_2\sin(\sqrt{3}t)\right)e^{-t} \\ &= \left\{\left(-A_1+\sqrt{3}A_2\right)\cos(\sqrt{3}t)+\left(-\sqrt{3}A_1-A_2\right)\sin(\sqrt{3}t)\right\}e^{-t} \end{aligned}$$

初期条件として $t=0$ で $q(t)=0$，$i(t)=0$ を代入すると

$$\begin{aligned} q(0) &= 2+A_1=0 \\ i(0) &= -A_1+\sqrt{3}A_2=0 \end{aligned}$$

これを解くと，$A_1=-2$，$A_2=-\frac{2}{3}\sqrt{3}$ と求まるので，

$$\begin{aligned} q(t) &= 2+\left(-2\cos(\sqrt{3}t)-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin(\sqrt{3}t)\right)e^{-t}\ \mathrm{C} \\ i(t) &= \frac{8\sqrt{3}}{3}\sin(\sqrt{3}t)e^{-t}\ \mathrm{A} \end{aligned}$$

(d)

　問題に与えられた数値を代入すると

$$m^2+4=0 \qquad \rightarrow \qquad m=\pm j2$$

よって，一般解は

$$\begin{aligned} q(t) &= q_s(t)+q_t(t)=2+A_1\cos 2t+A_2\sin 2t \\ i(t) &= \frac{dq}{dt}=-2A_1\sin 2t+2A_2\cos 2t \end{aligned}$$

初期条件として $t=0$ で $q(t)=0$，$i(t)=0$ を代入すると

$$\begin{aligned} q(0) &= 2+A_1=0 \\ i(0) &= 2A_2=0 \end{aligned}$$

これを解くと，$A_1=-2$，$A_2=0$ と求まるので，

$$\begin{aligned} q(t) &= 2-2\cos 2t\ \mathrm{C} \\ i(t) &= 4\sin 2t\ \mathrm{A} \end{aligned}$$