

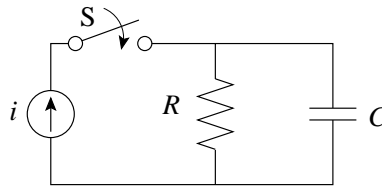
課題 1

下図の回路で、 $t = 0$ でスイッチを閉じた後の R, C にかかる電圧の時間変化を求めよ。

(a) $i = I$

(b) $i = I_m \sin(\omega t + \theta)$

また、(a) の場合で、十分時間が経過した後スイッチを切ったときの R, C にかかる電圧の時間変化を求め、コンデンサが持っていたエネルギーと抵抗で消費されたエネルギーを比較せよ。



解答

抵抗 R にかかる電圧を v 、コンデンサに蓄えられる電荷を q と置くと節点方程式は以下のように書ける

$$i_C + i_R = \frac{dq}{dt} + \frac{v}{R} = i$$

ここで、 $q = Cv_C = Cv$ であるので

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = i$$

(a)

電圧を $v = v_s + v_t$ のように定常解と過渡解に分けると、定常解 v_s は

$$\frac{v_s}{R} = I \quad \rightarrow \quad v_s = RI$$

過渡解は

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

を解くことにより以下のように求まる

$$v_t = Ae^{-t/\tau} \quad (\tau = CR)$$

したがって、一般解は

$$v = v_s + v_t = RI + Ae^{-t/\tau}$$

いま、初期条件 ($t = 0$ で $v = 0$) を用いると

$$RI + A = 0 \quad \rightarrow \quad A = -RI$$

よって、求めるべき解は以下のように求まる。

$$v = RI \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

ただし、 $\tau = CR$ である。

次に、スイッチを入れた後十分時間が経ってからスイッチを切る。このとき、 $t \rightarrow \infty$ で $v_\infty = RI$ であるので、コンデンサが保持するエネルギーは

$$W_C = \frac{1}{2} C v_\infty^2 = \frac{1}{2} C R^2 I^2$$

である。この状態でスイッチを切るとコンデンサの電荷が放電される。便宜的に、スイッチを切った時間を $t = 0$ とすると、電圧の時間変化は

$$v = RI e^{-t/\tau} \quad (\tau = CR)$$

と求まる。したがって、抵抗 R で消費されるエネルギーは以下のように求まる。

$$W_R = \int_0^\infty \frac{v^2}{R} dt = \int_0^\infty RI^2 e^{-2t/\tau} dt = \left[RI^2 \left(-\frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau} \right) \right]_0^\infty = \frac{RI^2 \cdot \tau}{2} = \frac{CR^2 I^2}{2}$$

以上より、コンデンサが保持していたエネルギーは全て抵抗で消費されたことがわかる。

(b)

交流電源が接続された場合の定常解は交流理論より以下のように求まる。

$$j\omega CV + \frac{V}{R} = I_m e^{j\theta} \quad \rightarrow \quad V = \frac{R e^{j\theta}}{1 + j\omega CR} = \frac{R I_m}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} e^{j(\theta - \phi)} = V_m e^{j\theta - \phi}$$

$$v = V_m \sin(\omega t + \theta - \phi) \quad \left(\phi = \tan^{-1} \omega CR, \quad V_m = \frac{R I_m}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} \right)$$

過渡解については (a) と同様に求まるので、一般解は以下のように書ける

$$v = V_m \sin(\omega t + \theta - \phi) + A e^{-t/\tau}$$

初期条件 ($t = 0$ で $v = 0$) を用いると

$$A = -V_m \sin(\theta - \phi)$$

よって、求めるべき解は以下のように求まる

$$v = V_m \sin(\omega t + \theta - \phi) - V_m \sin(\theta - \phi) e^{-t/\tau}$$

ただし、

$$\phi = \tan^{-1} \omega CR, \quad V_m = \frac{R I_m}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}, \quad \tau = CR$$