電気回路演習 II 第 9 回 (平成 18 年 12 月 15 日 (金))

演習

図の回路においてスイッチ S を閉じて定常状態になった後，$t = 0$ でスイッチ S を開く場合を考える．以下の設問に答えなさい．

(a) $t = 0$ 以降 $(t \geq 0)$，R_3 に流れる電流 $i(t)$ を求め，時間変化を図示しなさい

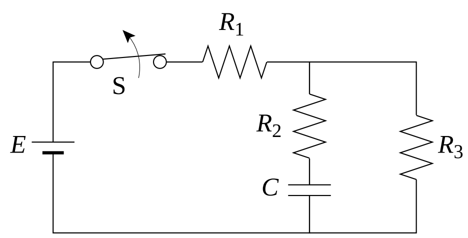
(b) 時定数 τ を求めなさい

$E = 18$ V，$R_1 = 2$ kΩ，$R_2 = 1$ kΩ，$R_3 = 3$ kΩ，$C = 1$ μF として以下の設問に答えなさい．なお，$e = 2.7$ として計算しなさい．

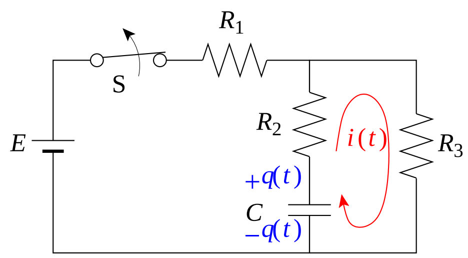
(c) 時定数 τ を求めなさい

(d) $t = 0$ s のときの電流 $i(0)$ を求めなさい

(e) $t = 4$ ms のときの電流 $i(4\ \mathrm{ms})$ を求めなさい



解答



定常状態でコンデンサ C にかかる電圧 V_C は

$$V_C = \frac{R_3}{R_1 + R_3} E$$

なので，コンデンサ C に蓄えられる電荷 Q は

$$Q = CV_C = \frac{R_3 CE}{R_1 + R_3}$$

$t = 0$ でスイッチ S を開いた後の回路方程式は

$$\frac{q(t)}{C} = (R_2 + R_3) i(t)$$

さらに $i(t) = -\dfrac{dq(t)}{dt}$ から

$$(R_2 + R_3)\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0$$

上式の定常解 $q_s(t)$ と過渡解 $q_t(t)$ はそれぞれ

$$\frac{q_s(t)}{C} = 0 \quad \rightarrow \quad q_s(t) = 0$$

$$(R_2 + R_3)\frac{dq_t(t)}{dt} + \frac{q_t(t)}{C} = 0 \quad \rightarrow \quad q_t(t) = Ae^{-\frac{t}{C(R_2+R_3)}} \qquad (A : 積分定数)$$

従って一般解は

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = Ae^{-\frac{t}{C(R_2+R_3)}}$$

$t=0$ での初期条件より積分定数 A を求めると

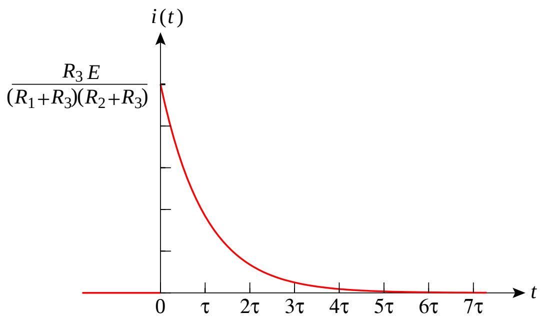
$$q(0) = A = \frac{R_3 CE}{R_1 + R_3}$$

以上より電荷 $q(t)$ は

$$q(t) = \frac{R_3 CE}{R_1 + R_3} e^{-\frac{t}{C(R_2+R_3)}}$$

よって電流 $i(t)$ は

$$\begin{aligned} i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} &= -\frac{R_3 CE}{R_1 + R_3} \cdot \left\{ -\frac{1}{C(R_2 + R_3)} \right\} e^{-\frac{t}{C(R_2+R_3)}} \\ &= \frac{R_3 E}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_3)} e^{-\frac{t}{C(R_2+R_3)}} \end{aligned}$$



時定数 τ は

$$\tau = C(R_2 + R_3)$$

与えられた値を代入すると

$$\begin{aligned} \tau &= 1 \times 10^{-6} \left(1 \times 10^3 + 3 \times 10^3\right) = 4 \text{ ms} \\ i(0) &= \frac{3 \times 10^3 \cdot 18}{(2 \times 10^3 + 3 \times 10^3) \cdot (1 \times 10^3 + 3 \times 10^3)} = \frac{54}{20} \times 10^{-3} = 2.7 \text{ mA} \\ i(4 \text{ ms}) &= 2.7e^{-1} = 1 \text{ mA} \end{aligned}$$