電気回路演習 II 第 5 回 (平成 18 年 11 月 10 日 (金))

演習

(1) 図 1 に示す回路の R_0 に関する逆回路を求めなさい．

(2) 図 2 に示す回路の R_0 に関する逆回路を求めなさい．また $f = 50$ Hz，$R = 2\ \Omega$，$L_1 = L_2 = \dfrac{1}{100\pi}$ H，$L_3 = \dfrac{1}{200\pi}$ H，$C = \dfrac{1}{50\pi}$ F，$R_0 = 1\ \Omega$ とするとき，元の回路の入力インピーダンス Z_i と逆回路のインピーダンス Z_{ri} を求め，$Z_i \cdot Z_{ri} = R_0^2$ の関係が成り立つことを示しなさい．

(3) 図 3 の回路において $R_1 = 2\ \Omega$，$R_2 = 4\ \Omega$，$R_3 = 20\ \Omega$，$R_4 = 5\ \Omega$，$R_5 = 4\ \Omega$，$V = 1$ V としたとき，R_5 に流れる電流 I を求めなさい．

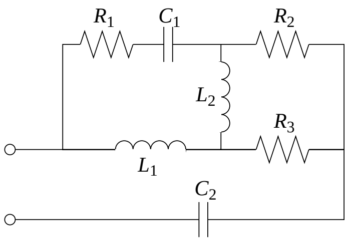


図 1

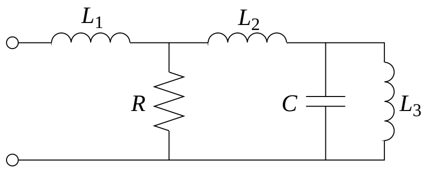


図 2

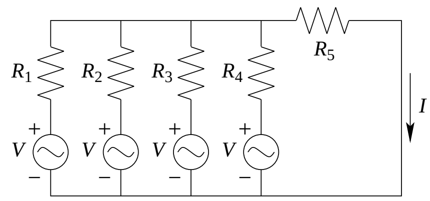


図 3

解答

(1) 図 1′ のように便宜的に電圧源を加え，節点 0〜3 を考え，逆回路を作る．

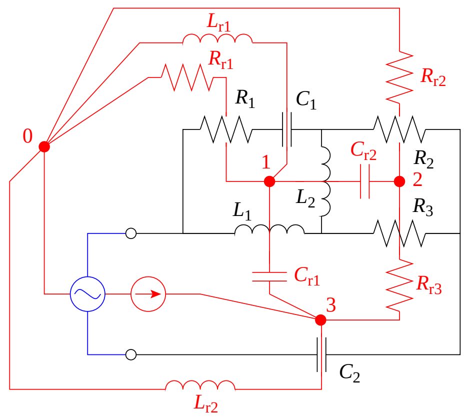
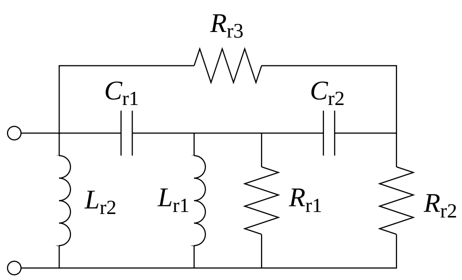


図 1′

図 1′ から電流源を取り除き，整理すると



$$R_{r1} = \frac{R_0^2}{R_1},\quad R_{r2} = \frac{R_0^2}{R_2},\quad R_{r3} = \frac{R_0^2}{R_3},$$

$$C_{r1} = \frac{L_1}{R_0^2},\quad C_{r2} = \frac{L_2}{R_0^2},\quad L_{r1} = C_1 R_0^2,\quad L_{r2} = C_2 R_0^2$$

(2) L_2，L_3，C を 1 つの素子 Z_A と考え，図 2-a のように書き換える．素子 Z_A に対する逆回路を求めると図 2-b のようになり，これを Z_{rA} とする．

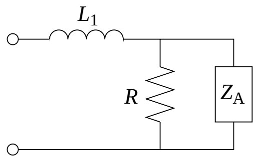


図 2-a

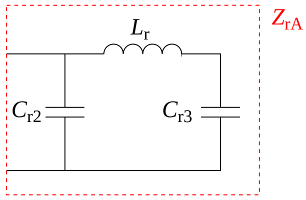


図 2-b

図 2-a に対する逆回路を求めると図 2-c のようになり，Z_{rA} を図 2-b で置き換えると図 2 に対する逆回路が図 2-d のように求められる．

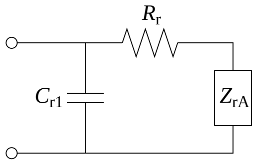


図 2-c

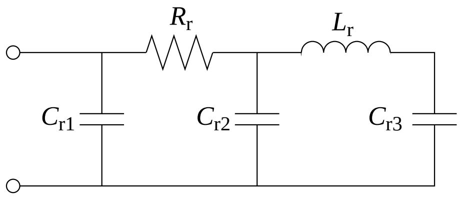


図 2-d

$$R_r = \frac{R_0^2}{R}, \quad L_r = CR_0^2, \quad C_{r1} = \frac{L_1}{R_0^2}, \quad C_{r2} = \frac{L_2}{R_0^2}, \quad C_{r3} = \frac{L_3}{R_0^2}$$

元の回路 (図 2) の C と L_3 の並列共振回路のインピーダンス Z は

$$Z = \frac{1}{\dfrac{1}{j\omega L_3} + j\omega C} = \frac{j\omega L_3}{1 - \omega^2 L_3 C} = \frac{j100\pi \cdot \dfrac{1}{200\pi}}{1 - 10000\pi^2 \cdot \dfrac{1}{200\pi} \cdot \dfrac{1}{50\pi}} = \frac{j\dfrac{1}{2}}{1-1} = \infty \ \Omega$$

よって，図 2 の回路は図 2-e のように考えることができ，その入力インピーダンス Z_i は

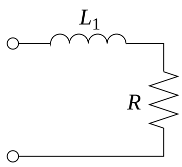


図 2-e

$$Z_i = R + j\omega L_1 = 2 + j \ \Omega$$

一方，逆回路 (図 2-d) の L_r と C_{r3} の直列共振回路のインピーダンス Z は

$$Z = j\omega L_r + \frac{1}{j\omega C_{r3}} = j\left(\omega CR_0^2 - \frac{1}{\omega\dfrac{L_3}{R_0^2}}\right) = j\left(\frac{100\pi}{50\pi} - \frac{1}{\dfrac{100\pi}{200\pi}}\right) = 0 \ \Omega$$

よって，図 2-d の回路は図 2-f のように考えることができ，その入力インピーダンス Z_{ri} は

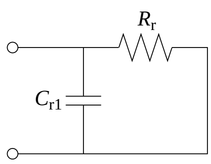


図 2-f

$$Z_{ri} = \frac{1}{\dfrac{1}{R_r} + j\omega C_{r1}} = \frac{1}{\dfrac{R}{R_0^2} + j\omega \dfrac{L_1}{R_0^2}} = \frac{R_0^2}{R + j\omega L_1} = \frac{1}{2+j} = \frac{2-j}{5}\ \Omega$$

以上より

$$Z_i \cdot Z_{ri} = (2+j) \cdot \frac{2-j}{5} = 1 = 1^2 = R_0^2$$

(3) 相反定理より，図 3 の I を求めることは図 3′ の I $(= I_1 + I_2 + I_3 + I_4)$ を求めることに等しい．

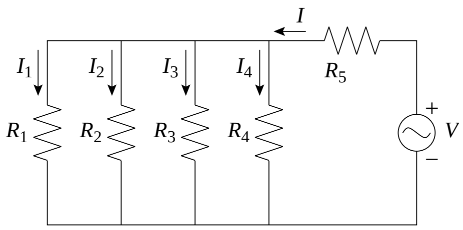


図 3′

R_1〜R_4 の合成抵抗値 R は

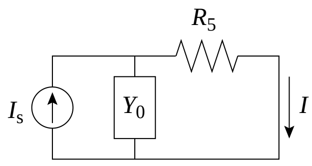
$$R = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4}} = \frac{1}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{5}} = \frac{1}{0.5 + 0.25 + 0.05 + 0.2} = 1\ \Omega$$

よって

$$I = \frac{V}{R + R_5} = \frac{1}{1+4} = 0.2\ \mathrm{A}$$

(3) の別解

各電圧源を電流源に変換してまとめると以下のように書ける．



$$Y_0 = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{R_i} = 1\ \mathrm{S}$$

$$I_s = \sum_{i=1}^{4} \frac{V}{R_i} = V \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{R_i} = 1\ \mathrm{A}$$

したがって，分流の関係より

$$I = \frac{\dfrac{1}{R_5}}{Y_0 + \dfrac{1}{R_5}} I_s = 0.2\ \mathrm{A}$$