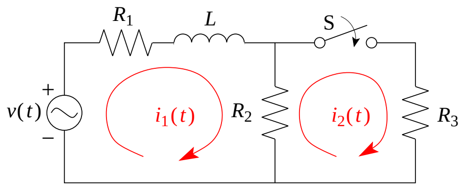
電気回路演習 II 第 15 回 (平成 19 年 2 月 9 日 (金))

演習

図の回路において，スイッチ S を開いて定常状態になっているとする．ここで，スイッチ S を閉じたとして以下の設問に答えなさい．なお，スイッチ S を閉じた時刻を $t = 0$，$R_1 = 1\ \Omega$，$R_2 = R_3 = 2\ \Omega$，$L = 0.2$ H，$v(t) = 10 \sin 20t$ [V] とする．



(a) 時刻 $t \leq 0$ での電流 $i_1(t)$ を求めなさい．また，得られた $i_1(t)$ から $t = 0$ における電流 $i_1(0)$ を求めなさい．

(b) 時刻 $0 \leq t$ での電流 $i_1(t)$，$i_2(t)$ についての回路方程式を求めなさい．

(c) 設問 (b) で求めた式をラプラス変換しなさい．

(d) $I_2(s)$ を求めなさい．

(e) $I_2(s)$ を逆ラプラス変換し，電流 $i_1(t)$，$i_2(t)$ を求めなさい．

解答

(a) 時刻 $t \leq 0$ での回路では，交流理論より

$$I_1 = \frac{V}{R_1 + R_2 + j\omega L} = \frac{10}{1 + 2 + j20 \times 0.2} = \frac{10}{3 + j4} = \frac{10}{5e^{j\theta}} = 2e^{-j\theta} \qquad \left(\tan\theta = \frac{4}{3}\right)$$

時間変化 $e^{j\omega t} = e^{j20t}$ を乗じ，虚部を取ると，電流の時間変化は

$$i_1(t) = \mathrm{Im}\left\{2e^{j(20t-\theta)}\right\} = 2\sin(20t - \theta)\ [\mathrm{A}]$$

よって，$t = 0$ では

$$i_1(0) = -2\sin\theta = -2 \cdot \frac{4}{5} = -\frac{8}{5}\ \mathrm{A}$$

(b)

$$R_1 i_1(t) + L\frac{di_1(t)}{dt} + R_2\left(i_1(t) - i_2(t)\right) = v(t)$$
$$R_3 i_2(t) + R_2\left(i_2(t) - i_1(t)\right) = 0$$

与えられた値を代入すると

$$i_1(t) + 0.2\frac{di_1(t)}{dt} + 2\left(i_1(t) - i_2(t)\right) = 10\sin 20t$$
$$2i_2(t) + 2\left(i_2(t) - i_1(t)\right) = 0$$

$i_1(t)$，$i_2(t)$ について整理すると

$$3i_1(t) + 0.2\frac{di_1(t)}{dt} - 2i_2(t) = 10\sin 20t$$
$$-2i_1(t) + 4i_2(t) = 0$$

(c)

$$3I_1(s)+0.2\left(sI_1(s)-i_1(0)\right)-2I_2(s)=\frac{200}{s^2+20^2}$$
$$-2I_1(s)+4I_2(s)=0$$

上式を整理すると

$$(3+0.2s)I_1(s)-2I_2(s)=\frac{200}{s^2+20^2}+0.2i_1(0)$$
$$-I_1(s)+2I_2(s)=0$$

(d) 設問 (c) の答の第 2 式より

$$I_1(s)=2I_2(s)$$

設問 (c) の答の第 1 式に，上式と設問 (a) で求めた $i(0)=-\frac{8}{5}$ A を代入する

$$(3+0.2s)\cdot 2I_2(s)-2I_2(s)=\frac{200}{s^2+20^2}-\frac{1.6}{5}$$

両辺を 5/2 倍し整理すると

$$(s+10)I_2(s)=\frac{500}{s^2+20^2}-0.8$$

よって

$$I_2(s)=\frac{500}{(s+10)(s^2+20^2)}-\frac{0.8}{s+10}$$

(e) 設問 (d) で求めた $I_2(s)$ の第 1 項を部分分数展開する．

$$\frac{500}{(s+10)(s^2+20^2)}=\frac{K_1}{s+10}+\frac{K_2s+20K_3}{s^2+20^2}=\frac{K_1s^2+400K_1+K_2s^2+(10K_2+20K_3)s+200K_3}{(s+10)(s^2+20^2)}$$

係数を比較すると

$$\begin{aligned}
s^2 &: \quad K_1+K_2=0 \quad\rightarrow\quad K_1=-K_2\\
s^1 &: \quad 10K_2+20K_3=0 \quad\rightarrow\quad K_2=-2K_3=-K_1\\
s^0 &: \quad 400K_1+200K_3=500 \quad\rightarrow\quad 4K_1+2K_3=5
\end{aligned}$$

第 2 式を第 3 式に代入

$$10K_3=5 \quad\rightarrow\quad K_3=\frac{1}{2}$$

上式を第 1 式，第 2 式に代入すると

$$K_1=1, \quad K_2=-1$$

よって

$$I_2(s)=\frac{1}{s+10}+\frac{-s+10}{s^2+20^2}-\frac{0.8}{s+10}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s+10}-\frac{s}{s^2+20^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{20}{s^2+20^2}$$

上式を逆ラプラス変換すると

$$i_2(t)=\frac{1}{5}e^{-10t}-\cos 20t+\frac{1}{2}\sin 20t \text{ [A]}$$

また，$i_1(t)=2i_2(t)$ なので

$$i_1(t)=\frac{2}{5}e^{-10t}-2\cos 20t+\sin 20t \text{ [A]}$$