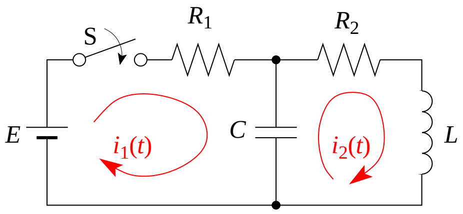
電気回路演習 II 第 13 回 (平成 19 年 2 月 2 日 (金))

演習

図の回路において，時刻 $t=0$ でスイッチ S を閉じるとして，設問に答えなさい．



(a) 時刻 $0<t$ での，電流 $i_1(t)$，$i_2(t)$ についての回路方程式を求めなさい．

(b) 設問 (a) で求めた回路方程式をラプラス変換した式を求めなさい．

以下の設問では $R_1=2\ \Omega$，$R_2=4\ \Omega$，$L=1$ H，$C=0.5$ F，$E=6$ V，$i_1(0)=i_2(0)=0$，$t=0$ でのコンデンサの電荷は 0 として解答しなさい．

(c) 設問 (b) で求めた式に与えられた値を代入し，行列の形にまとめた式を書きなさい．

(d) 設問 (c) の式から電流 $I_1(s)$，$I_2(s)$ を求めなさい．

(e) $I_1(s)$，$I_2(s)$ を逆ラプラス変換し，電流 $i_1(t)$，$i_2(t)$ を求めなさい．

解答

(a)

$$R_1 i_1(t) + \frac{1}{C}\int (i_1(t)-i_2(t))\,dt = E$$
$$\frac{1}{C}\int (i_2(t)-i_1(t))\,dt + R_2 i_2(t) + L\frac{di_2(t)}{dt} = 0$$

(b)

$$R_1 I_1(s) + \frac{1}{C}\left\{\frac{I_1(s)-I_2(s)}{s} + \frac{1}{s}\int (i_1(t)-i_2(t))\,dt\Big|_{t=0}\right\} = \frac{E}{s}$$
$$\frac{1}{C}\left\{\frac{I_2(s)-I_1(s)}{s} + \frac{1}{s}\int (i_2(t)-i_1(t))\,dt\Big|_{t=0}\right\} + R_2 I_2(s) + L\{sI_2(s)-i_2(0)\} = 0$$

(c) 設問 (b) で求めた式に与えられた値を代入すると

$$2I_1(s) + 2\left\{\frac{I_1(s)-I_2(s)}{s}\right\} = \frac{6}{s}$$
$$2\left\{\frac{I_2(s)-I_1(s)}{s}\right\} + 4I_2(s) + sI_2(s) = 0$$

行列にまとめると

$$\begin{bmatrix} 2+\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} \\ -\frac{2}{s} & \frac{2}{s}+4+s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

(d) 行列式の値は

$$\Delta = \left(2+\frac{2}{s}\right)\left(\frac{2}{s}+4+s\right)-\frac{4}{s^2} = 2s+\frac{12}{s}+10 = \frac{2(s^2+5s+6)}{s} = \frac{2(s+2)(s+3)}{s}$$

Cramer の公式より

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{6}{s} & -\frac{2}{s} \\ 0 & \frac{2}{s}+4+s \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\frac{6}{s}\left(\frac{2}{s}+4+s\right)}{\frac{2(s+2)(s+3)}{s}} = \frac{3(s^2+4s+2)}{s(s+2)(s+3)}$$

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} 2+\frac{2}{s} & \frac{6}{s} \\ -\frac{2}{s} & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\frac{12}{s^2}}{\frac{2(s+2)(s+3)}{s}} = \frac{6}{s(s+2)(s+3)}$$

(e)

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{I_1(s)\} = sI_1(s)e^{st}\Big|_{s=0} + (s+2)I_1(s)e^{st}\Big|_{s=-2} + (s+3)I_1(s)e^{st}\Big|_{s=-3} \\ &= \frac{3(s^2+4s+2)}{(s+2)(s+3)}e^{st}\Bigg|_{s=0} + \frac{3(s^2+4s+2)}{s(s+3)}e^{st}\Bigg|_{s=-2} + \frac{3(s^2+4s+2)}{s(s+2)}e^{st}\Bigg|_{s=-3} \\ &= 1+3e^{-2t}-e^{-3t}\ [\mathrm{A}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_2(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{I_2(s)\} = sI_2(s)e^{st}\Big|_{s=0} + (s+2)I_2(s)e^{st}\Big|_{s=-2} + (s+3)I_2(s)e^{st}\Big|_{s=-3} \\ &= \frac{6}{(s+2)(s+3)}e^{st}\Bigg|_{s=0} + \frac{6}{s(s+3)}e^{st}\Bigg|_{s=-2} + \frac{6}{s(s+2)}e^{st}\Bigg|_{s=-3} \\ &= 1-3e^{-2t}+2e^{-3t}\ [\mathrm{A}] \end{aligned}$$